ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Рубцовский индустриальный институт
ГОУ ВПО «Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова»

О.В. Ефременкова
И.И. Кулешова

МАТЕМАТИКЕ
Часть II

Методическое пособие

для студентов СПО

Рубцовск 2024

СОДЕРЖАНИЕ

1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.1. Простейшие понятия теории множеств

1.1.1. Множество и его элементы. Подмножества

Множеством является совокупность некоторых предметов, объединенных по какому-либо признаку. Например, множество учащихся школы, множество букв алфавита, множество натуральных чисел, множество точек на прямой и т.д. Предметы, из которых состоит множество, называются его элементами. Множества принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита (А, *В, С, ...*),. а элементы множеств — малыми буквами латинского или греческого алфавита (*a, b, c*, α, β, γ*, ...*).

Запись $\alpha \in A$ означает, что элемент α принадлежит множеству *А*. Запись $\alpha \notin A$ означает, что элемент α не принадлежит множеству *А*. Например, если *N* — множество натуральных чисел, то $1 \in N$, $0 \notin N$.

Множество считается заданным, если перечислены все его элементы или указано такое свойство его элементов, которое позволяет судить о том, принадлежит данный элемент множеству или нет. Такие свойства называют характеристическими свойствами. Например, говоря о множестве всех четных чисел, мы указываем характеристическое свойство его элементов: каждое число, принадлежащее этому множеству, делится нацело на два.

Множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются равными. Если множества *А* и *В* равны, то пишут: $A = B$. Если любой элемент множества *В* является и элементом множества *А,* то множество *В* называется подмножеством множества *А*. В этом случае говорят, что множество *В* содержится во множестве *А* или *А* содержит *В*, и пишут: $B \subset A$ или $A \supset B$.

Рассматривают и множество, которое не содержит ни одного элемента. Такое множество называется пустым и обозначается символом $\varnothing$. Пустое множество считают по определению подмножеством любого множества.

Следовательно, у любого множества A всегда имеются два очевидных подмножества: A и $\varnothing$.

Пусть множество A состоит из чисел 1, 3 и 5, что записывают в виде $A=\{1; 3; 5\}$. Тогда множества $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{1; 3\}$, $\{1; 5\}$, $\{3; 5\}$, $\varnothing$, $\{1; 3; 5\}$ являются подмножествами множества A.

Говорят, что между множествами A и В установлено взаимно однозначное соответствие, если каждому элементу множества A соответствует единственный элемент множества B и, наоборот, каждому элементу множества B соответствует единственный элемент множества A. Множества A и B, между которыми можно установить взаимно однозначное соответствие, называют эквивалентными и пишут: $A \sim B$. Например, множество натуральных чисел N и множество всех четных чисел M есть эквивалентные множества, т. е. $N \sim M$. Действительно, между множествами N и M легко установить взаимно однозначное соответствие, если каждому натуральному числу $n \in N$ поставить в соответствие четное число $m=2n \in M$ и, наоборот, каждому четному числу $m=2n \in M$ поставить в соответствие $n \in N$. Очевидно, что если $A \sim B$ *и* $B \sim C$, то А ~ С.

Множество A называется конечным, если существует такое натуральное число n, что множество A эквивалентно множеству $\{1; 2;...; n\}$. В этом случае говорят, что множество A содержит n элементов.

Существуют два способа установления эквивалентности двух конечных множеств: 1) установить непосредственно взаимно однозначное соответствие между их элементами; 2) пересчитать элементы множеств и сравнить число элементов в каждом из них. Например, если $A = \{1; 2; 3;4\}$и В={квадрат; треугольник; прямоугольник; трапеция}, то это эквивалентные конечные множества. Последнее следует из того, что в обоих множествах содержится по четыре элемента.

Конечное множество, состоящее из n элементов, называется упорядоченным, если его элементы каким-либо образом занумерованы натуральными числами 1, 2, ..., n. Например, множество учащихся класса может быть упорядочено: фамилии каждого учащегося в журнале можно занумеровать натуральными числами (первый по списку, второй по списку и т. д.).

1.1.2. Пересечение и объединение множеств

Рассмотрим множество натуральных чисел, кратных числу 2, и множество натуральных чисел, кратных числу 5. Тогда множество чисел, кратных числу 10, состоит из элементов, которые входят в каждое из двух рассмотренных множеств.

Множество *C,* состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат каждому из данных множеств А и *B,* называется пересечением множеств *A* и *B* и обозначается $A \cap B$ (здесь $\cap$ — знак пересечения). На рисунке 1.1 изображены множества *A* и *B* и их пересечение. Для точечных множеств (например, геометрических фигур) смысл термина «пересечение множеств» соответствует привычному для нас смыслу термина «пересечение фигур». Так, пересечение отрезков *AB* и *CD* (рис. 1.2) есть отрезок *AD,*

Два множества, пересечение которых является пустым множеством, называются непересекающимися множествами. Так, например, пересечение отрезков *AB* и *CD* (рис. 1.3) пусто, поэтому это непересекающиеся множества.

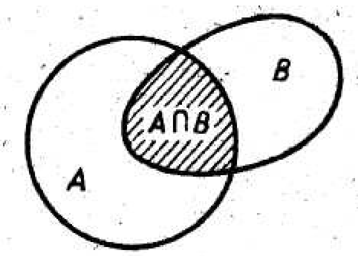


Рис. 1.1

Рис. 1.2

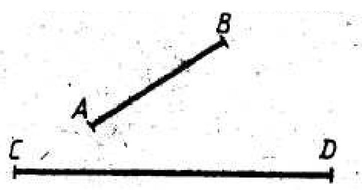


Рис. 1.3

Объединением множеств *A* и *B* называется такое множество С, которое состоит из всех элементов множеств *A* и *B,* и только из них. В этом случае пишут: $A \cup B$ (здесь $\cup$ — знак объединения). Если множества *A* и *B* имеют общие элементы (т. е. $A \cap B \neq \varnothing$), то каждый из этих общих элементов берется в множестве С только один раз. Например:

а) {1; 2; 5} $\cup$ {3;4}={1; 2; 3; 4; 5},

б) {1; 2; 4} $\cup$ {3; 4}={1; 2; 3; 4}.

1.1.3. Вычитание множеств. Дополнение до множества. Прямое произведение двух множеств

Пусть даны множества *A* и *B*. Множество *C*, которое состоит из всех элементов множества *A,* не принадлежащих множеству *B,* называется разностью множеств *A* и *B* и обозначается $C = A \backslash B$ (на рис. 1.4, а), разность множеств показана штриховкой). Например:

а) если $A=\{1; 3; 5; 6\}$, $B=\{1; 3\}$, то $A\backslash B=\{5; 6\}$;

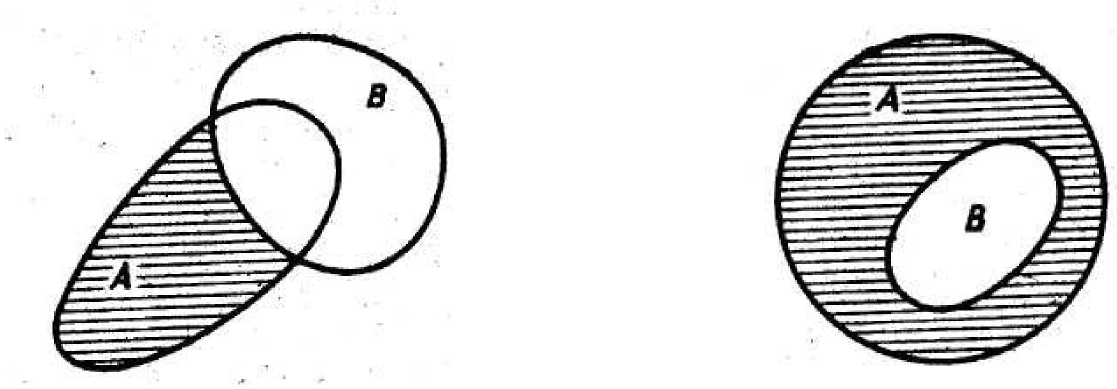
б) если $A=\{1; 4; 6\}$, $B=\{3; 5\}$, то $A\backslash B = \{1; 4; 6\}$;'

в) если $A =\{2; 3\}$, $B=\{1; 2; 3\}$, то $A\backslash B=\varnothing$.

Если $A\supset B,$ то разность $A \backslash B$ называется дополнением множества *B* до множества *A* (рис. 1.4, *б*)). Отметим, что результат операции «дополнение» существенно зависит, от того множества, до которого «дополняется» данное множество. Например, дополнением множества целых чисел до множества всех рациональных чисел является множество всех дробных чисел; если же рассматривать дополнение множества целых чисел до множества действительных чисел, то дополнением этого множества будет множество всех дробных и всех иррациональных чисел.

Прямым произведением множества *A* и *B* называется множество, элементами которого являются все упорядоченные пары $(x; y)$,

в которых первым компонентом является элемент из *A,* вторым компонентом — элемент из *B*. Прямое произведение множеств *A* и *B* обозначается $A\times B$.



а) *б*)

Рис. 1.4

Пример. Пусть A={2; I; 3; 9}, B={2; 4; 5}. Найти $A\times B$

Имеем $A\times B$ ={(2; 2); (2; 4); (2; 5); (1; 2); (1; 4); (1; 5); (3; 2); (3; 4); (3; 5); (9;2); (9; 4); (9; 5)}.

Для описания прямого произведения множеств часто бывает удобным использовать «геометрический язык». При этом элементы множества $A\times B$ называют точками. Например, если Z ($x; y$) — точка числовой плоскости, то $x\in A$ называют абсциссой, а $y\in B$ — ординатой точки Z. Эта терминология понятна, если обратить внимание на то, что множество точек плоскости является, по существу, прямым произведением вида $R\times R$, где R — множество действительных чисел.

1.2. Множество действительных чисел

1.2.1. Рациональные числа

Представления о числах у человечества складывались постепенно, под влиянием требований практики. Например, натуральные числа появились в связи с необходимостью подсчета предметов, т. е. с необходимостью ответить на вопрос: сколько элементов содержит данное конечное множество? Так, пересчитав книги, стоящие на полках книжного шкафа, мы говорим, что на первой полке имеется 6 книг, т. е. множество книг на первой полке содержит 6 элементов (книг), а на второй полке — 7 книг, т. е. множество книг на второй полке состоит из 7 элементов (книг), и т. д. Однако возможна такая ситуация: одна из полок книжного шкафа свободна от книг, т. е. множество книг на этой полке — пустое множество, так как ему не принадлежит ни один элемент (книга). В этом случае число нуль дает возможность ответить на вопрос: сколько элементов содержит данное множество?

Если присоединить к множеству всех натуральных чисел $N=\{1; 2; 3; ...\}$ число 0, то получим множество неотрицательных целых чисел $z_0=\{0; 1; 2; 3; ...\}=N\cup\{0\}$.

Неотрицательных целых чисел для решения задач, поставленных практикой (а значит, и математических задач, отражающих данную реальную ситуацию), оказалось недостаточно. Так, чтобы охарактеризовать температуру воздуха выше и ниже нуля, а также движение в противоположных направлениях, требуются противоположные числа. Например, температуру воздуха в шесть градусов тепла и шесть градусов мороза характеризуют соответственно +6°C и —6°C. Числа 5 и—5 называются противоположными числами: —5 противоположно 5, а 5 противоположно —5. В общем случае для натурального числа *n* противоположным будет —*n*, а для числа —*n* противоположным будет число *n*. Нуль считают противоположным самому себе.

Натуральные числа, нуль, а также числа, противоположные натуральным, составляют множество Z целых чисел, т. е. $Z = N \cup\{0\}\cup N\_$ где $N\_$ - множество чисел, противоположных натуральным.

Измерение величин привело к необходимости расширения множества целых чисел, введения дробных чисел. Например, высота Спасской башни Московского Кремля составляет 71 м, диаметр циферблата Кремлевских курантов — 6,12 м и т. д. Академический час продолжается 45 мин, или — $\frac{3}{4}$ ч, а одна из перемен — 20 мин. или $\frac{1}{3}$ ч.

Целые и дробные числа составляют множество Q рациональных чисел. Любое рациональное число можно записать в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in z$ и $n \in N$ (т.е. числитель есть целое число, а знаменатель — натуральное). Рациональное число может быть записано разными дробями. Например:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{10}{20};\quad -\frac{2}{3}=\frac{-2}{3}=\frac{-20}{30}=-\frac{24}{36};$$

$$-1,2=\frac{-6}{5}=\frac{-12}{10}=-\frac{120}{100};\ 5=\frac{5}{1}=\frac{10}{2}=\frac{50}{10};\ 0=\frac{0}{1}=\frac{0}{6}=\frac{0}{10}.$$

Среди дробей, изображающих данное рациональное число, всегда имеется единственная несократимая дробь; для целых чисел — это дробь, знаменатель которой равен единице.

Пусть дано рациональное число $\frac{m}{n}$. Деля числитель на знаменатель «уголком», получаем конечную или бесконечную десятичную дробь. Например:

$$\frac{1}{2}=0,5;\quad \frac{1}{3}=0,3333...;$$

$$-\frac{7}{5}=-1,4;\quad \frac{-3}{7}=-0,428571428571....$$

Условимся изображать конечную десятичную дробь в виде бесконечной десятичной дроби, у которой справа после десятичных знаков, отличных от нуля, на месте последующих десятичных знаков стоят нули, например:

$$\frac{1}{2}=0.5=0,5000...;\quad -\frac{7}{5}=-1,4000....$$

Целые числа также условимся, записывать в виде бесконечной десятичной дроби, у которой справа от запятой на месте десятичных - знаков стоят нули, например:

$$45=45,000,,,;\quad -3=-3,000....$$

Итак, любое рациональное число представимо в виде бесконечной десятичной дроби:

$$a_0,\ a_1a_2a_3...,$$

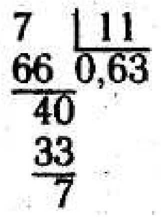
где a_0 —целое число, а каждое из $a_1 a_2 a_3$, ...— это одна из цифр 0, 1, 2,...,9.

Определение. Бесконечная десятичная дробь a_0, $a_1 a_2 a_3 ...$ называется периодической, если существуют такие натуральные числа N и p, что $a_{n+p} = a_n$ для любого $n \geq N$.

Например, 0,3333... есть периодическая десятичная дробь, так как, положив N=1 и p= 1, имеем $a_{n+1} = a_n = 3$ для любого $n \geq 1$. Число 0,5000..: также является бесконечной периодической десятичной дробью, для которой $a_{n+1}=a_n=0$ при $n \geq 2$, т. е. $N = 2$ и p=1. Число —3,476353535... также представлено в виде бесконечной десятичной периодической дроби, так как, положив $N = 4$ и p=2, получим $a_{n+p} = a_n$ для любого $n \geq 4$. Действительно, для любого $n \geq 4$ имеем $a_n = 3$ при четных n и $a_n = 5$ при нечетных n.

Для записи бесконечных периодических дробей принято употреблять такие обозначения: дробь 8,4900... обозначают 8,49(0); дробь 0,333… записывают в виде 0,(3), дробь —3,476353535... можно записать как —3,476(35). Число, записанное в скобках, называют периодом. Поэтому дробь 8,49(0) читается как «восемь целых, сорок девять сотых и нуль в периоде», 0,(3) читается как «нуль целых и три в периоде», а —3,476(35) читается как «минус три целых, четыреста семьдесят шесть тысячных и тридцать пять в периоде».

Каждое рациональное число может быть представлено бесконечной периодической десятичной дробью. Например, рациональное число $\frac{7}{11}$ представляется в виде десятичной периодической дроби 0,(63), причем для получения такого представления достаточно разделить «уголком» число 7 на 11:



Получив остаток, равный 7, мы можем дальше не вести вычислений, так как остатки и цифры в частном будут повторяться. Поэтому $\frac{7}{11}=0,6363...=0,(63)$, т. е. имеем нуль целых и 63 в периоде. В общем случае для произвольного рационального числа $\pm\frac{m}{n}$, где m и n - натуральные числа, поступают аналогично: делят m на n. Так как при делении на n для остатка имеется лишь n возможных значений 0, 1, 2,..., n — 1, то не более чем через n шагов в частном от деления m на n начнется повторение десятичных знаков. Последнее означает, что деление m на n приводит к периодической десятичной дроби. Можно показать, что всякая бесконечная периодическая десятичная дробь, имеющая своим периодом девятку, равна бесконечной десятичной периодической дроби с периодом, равным нулю, у которой десятичный разряд, предшествующий периоду, увеличен на единицу по сравнению с разрядом исходной дроби.

Пример. Показать, что 0,4(9)=0,5(0).

Пусть x=0,4(9). Тогда 100x—10 x=49, (9)—4, (9)=45, откуда $x=\frac{45}{90}=\frac{1}{2}$ =0,5=0,5(0).

В дальнейшем при представлении рациональных чисел, бесконечными периодическими десятичными дробями условимся исключать из рассмотрения бесконечные периодические дроби, период которых равен 9.

1.2.2. Действительные числа

Множество всех бесконечных десятичных дробей называется множеством действительных чисел и обозначается R. Отметим, что множество Q всех рациональных чисел является подмножеством множества R. Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными.

Теорема. Не существует рационального числа, квадрат которого равен числу 2.

Доказательство теоремы проведем методом от противного. Допустим, что существует рациональное число, квадрат которого равен 2, и оно представимо несократимой дробью $\frac{m}{n}$. Тогда имеем:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2, \text{ или } m^2 = 2n^2. \qquad (1.2.2.1)$$

Таким образом, m^2 есть число четное. Но тогда и число m является четным. Действительно, если бы $m=2k+1$ (т. е. было нечетным), то $m^2 = \left(4k^2 + 4k\right) + 1$ нечетное, так как ($4k^2+4k$) четное. Но если m — четное число, то $m=2k$ и из формулы (1.2.2.1) следует

$$n^2 = 2k^2,$$

т. е. число n^2 четное, а значит, и число n четное. Следовательно, наше допущение привело к тому, что оба числа m и n оказались чётными, что противоречит предположению о несократимости дроби $\frac{m}{n}$. Полученное противоречие показывает, что мы сделали неправильное допущение о существовании рационального числа, квадрат которого равен 2.

Число $\sqrt{2}$ иррациональное: $\sqrt{2}$ = 1,41421356... .

Еще одним примером иррационального числа может служить число π, которое является отношением длины окружности к диаметру: π=3,1415926.,. .

1.2.3. Абсолютная величина (модуль) действительного числа

Абсолютная величина (модуль) действительного числа x обозначается $|x|$ и определяется по формуле

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases} \qquad (1.2.3.1)$$

Например, если $x = 2$, то $|x|=2$, или если $x=-2{,}37$, то $|x| =2{,}37$.

Рассмотрим на плоскости горизонтальную прямую. Выберем на ней положительное направление (на рис. 1.5 слева направо), которое будем обозначать стрелкой, выберем начало отсчета — точку О и единичный отрезок *ОА*. Прямую *ОА* называют числовой прямой.

Каждое действительное число x можно изобразить точкой M на прямой *ОА,* если построить отрезок *ОМ* длины $|x|$, откладывая его вправо от точки О в случае $x>0$ и влево от точки O в случае $x<0$. Изображением числа нуль служит точка О. Поэтому каждому действительному числу отвечает вполне определенная точка числовой прямой. Справедливо и обратное утверждение: каждой точке числовой прямой отвечает определенное действительное число (изображением которого и служит эта точка). Часто множество R действительных чисел называют числовой прямой, а сами действительные числа — точками этой прямой.

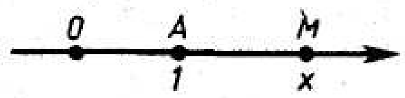


Рис. 1.5

Рассмотрим основные свойства абсолютной величины действительного числа. Из определения следует, что $|x|\geq 0$ для любого x, причем равенство нулю имеет место только в случае $x=0$. Имеет место и следующее очевидное неравенство:

$$-|x| \leq x \leq |x|. \qquad (1.2.3.2)$$

Теорема 1. Абсолютная величина произведения (частного) равна произведению (частному) абсолютных величин сомножителей (делимого и делителя), т. е.

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|; \qquad (1.2.3.3)$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad y \neq 0. \qquad (1.2.3.4)$$

Докажем формулу (1.2.3.3). Пусть $x>0$ и $y>0$. Согласно определению абсолютной величины получим $|x|=x$ и $|y|=y$. Так как $xy>0$, то по определению $|xy|=xy$. Следовательно,

$$|xy|=|x|\cdot|y|.$$

Пусть теперь $x<0$ и $y<0$. Тогда $(-x)>0$, $(-y)>0$ и $|x|=-x$, $|y|=-y$. Используя предыдущее, имеем:

$$|xy|=|(-x)\cdot(-y)|=(-x)\cdot(-y)=|x|\cdot|y|.$$

Осталось рассмотреть случай, когда знаки x и y противоположны.

Пусть для определенности $x>0$, а $y<0$. Так как $xy<0$ и $|x|=x$, $|y|=-y$, то, используя определение (1.2.3.1), имеем:

$$|xy|=-(xy)=x\cdot(-y)=|x|\cdot|y|.$$

Формула (1.2.3.3) доказана. Формула (1.2.3.4) доказывается аналогично.

Положив в формуле (1.2.3.3) $y=-1$, находим:

$$|x|=|-x|, \tag{1.2.3.5}$$

т. е. абсолютные величины противоположных чисел равны друг другу. На числовой прямой противоположные числа изображаются точками, расположенными на одинаковом расстоянии от точки О, но по разные стороны от нее (рис. 1.6).

Теорема 2. Неравенство

$$|x|\le\alpha \tag{1.2.3.6}$$

где $\alpha>0$, равносильно двойному неравенству

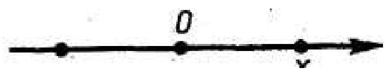
$$-\alpha\le x\le\alpha\,. \tag{1.2.3.7}$$

Пусть выполнено неравенство (1.2.3.6). Если $x\ge0$, то $|x|=x$ и правое неравенство в двойном неравенстве (1.2.3.7) выполнено в силу (1.2.3.6), а левое очевидно, так как $-\alpha<0$ и $x\ge0$.

Если $x<0$, то $|x|=-x$ и неравенство (1.2.3.6) принимает вид $-x\le\alpha$. Домножая последнее неравенство на -1, получаем, что левое неравенство в формуле (1.2.3.7) выполнено, а правое очевидно, так как $x<0$ и $\alpha>0$. Таким образом, мы доказали, что из неравенства (1.2.3.6) следует двойное неравенство (1.2.3.7).

Теперь предположим, что выполнено двойное неравенство (1.2.3.7). Если $x \geq 0$, то $x = |x|$ и справедливость неравенства (1.2.3.6) следует из правого неравенства (1.2.3.7). Если $x<0$, то $x = -|x|$ и неравенство (1.2.37) принимает вид $-\alpha \leq -|x| \leq \alpha$. Домножая левое неравенство в последнем двойном неравенстве на —1, получаем, что $|x| \leq |\alpha|$.

Заметим, что на числовой прямой числа, удовлетворяющие неравенству, (1.2.3.6), изображаются точками, лежащими между точками *A* и *B* (рис. 1.7).



-α α

Рис. 1.6

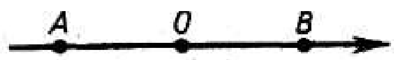


Рис. 1.7

Теорема 3. Из неравенства

$$|x| \geq \alpha \qquad (1.2.3.8)$$

следует, что

$$x \geq \alpha \text{ или } x \leq -\alpha. \qquad (1.2.3.9)$$

Если $x \geq 0$, то $|x| = x$ и из неравенства (1.2.3.8) следует, что $x \geq \alpha$. В случае $x<0$ имеем $|x| = -x$, и соотношение (1.2.3.8) принимает вид $-x \geq \alpha$. Домножая последнее неравенство на —1, находим, что $x \leq -\alpha$.

Пример 1. Решить неравенство $|x — 3| \leq 5$.

Согласно формуле (1.2.3.7) это неравенство равносильно двойному неравенству $— 5 \leq x — 3 \leq 5$, поэтому $— 2 \leq x \leq 8$.

Пример 2. Решить неравенство $(x + 4)^2 \leq 9$.

Извлекая квадратный корень, получаем неравенство $|x+4| \leq 3$, равносильное двойному неравенству $—3 \leq x + 4 \leq 3$, откуда $—7 \leq x \leq —1$.

Далее остановимся на других теоремах, характеризующих свойства абсолютной величины.

Теорема 4. Абсолютная величина суммы меньше или равна сумме абсолютных величин слагаемых, т. е.

$$|x+y|\leq|x|+|y|. \qquad (1.2.3.10)$$

Для любых x и y согласно формуле (1.2.3.2) имеем:

$$-|x|\leq x\leq|x|,$$

$$-|y|\leq y\leq|y|.$$

Сложив неравенства, получим: $-\left(|x|+|y|\right)\leq x+y\leq|x|+|y|$.

Из последнего неравенства согласно теореме 2 получим: $|x+y|\leq|x|+|y|$.

Теорема 5. Абсолютная величина разности больше или равна разности абсолютных величин уменьшаемого и вычитаемого, т. е.

$$|x-y|\geq|x|-|y|. \qquad (1.2.3.11)$$

В силу неравенства для абсолютной величины суммы

$$|x|=\left|(x-y)+y\right|\leq|x-y|+|y|,$$

откуда и следует формула (1.2.3.11).

1.3. Числовые множества. Промежутки. Окрестность точки

Рассмотрим конкретные подмножества множества действительных чисел,

1.3.1. Промежутки

Множество всех действительных чисел *x,* удовлетворяющих двойному неравенству $a\leq x\leq b$, называется замкнутым промежутком или отрезком с началом в точке а и концом в точке b и обозначается $[a; b]$ Длиной отрезка $[a;b]$ назовем число, равное $|b-a|$.

Множество всех действительных чисел *x,* таких, что $a<x<b$, называется открытым промежутком или интервалом с началом в точке a и концом в точке b и обозначается (а; b). Длиной интервала $(a; b)$ назовем число, равное $b — a$:

Множество всех действительных чисел этаких, что $a \leq x < b$, называется полуоткрытым промежутком и обозначается $[a;\ b)$. Аналогично определяется полуоткрытый промежуток $(a;\ b]$ т. е. множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $a < x \leq b$.

Множество всех действительных чисел x, таких, что $x > a$, называется бесконечным промежутком и обозначается $(a;\ +\infty)$. Неравенствами $x \geq a$, $x < b$, $x \leq b$ определяются бесконечные промежутки $[a;+\infty)$, $(-\infty;b)$ и $(-\infty;b]$.

Множество R также иногда называют бесконечным промежутком и обозначают $(-\infty;+\infty)$. Интервал $(0;\ +\ \infty)$ обозначают R_+, а интервал $(-\infty;\ 0)$ обозначают R_-.

Определение. Назовем окрестностью числа c любой интервал $(a;\ b)$, содержащий c, а ε-окрестностью (читается «эпсилон-окрестность») точки c— интервал $(c - \varepsilon;\ c + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$.

1.3.2. Ограниченные и неограниченные числовые множества

Определение 1. Числовое множество A называется ограниченным сверху (снизу), если существует такое действительное число M (число m), что для каждого элемента x числового множества выполняется неравенство $x \leq M$ $(x \geq m)$. При этом число M (число m) называется верхней границей (нижней границей) числового множества A.

Ограниченное сверху числовое множество A имеет бесконечно много верхних границ. В самом деле, если M_1 является верхней границей множества A, то любое действительное число $M_2 > M_1$ также является верхней границей множества A, так как для каждого элемента x множества A выполняется неравенство $x \leq M_1 \leq M_2$, т. е. $x \leq M_2$. Аналогичное замечание можно сделать в отношении нижних границ ограниченного снизу множества.

Определение 2. Наименьшая из всех верхних границ ограниченного сверху числового множества A называется верхней гранью этого множества. Наибольшая из всех нижних границ ограниченного снизу числового множества B называется нижней гранью этого множества. Иногда верхнюю (нижнюю) грань множества называют точной верхней (нижней) гранью множества.

К примеру, у множества отрицательных действительных чисел существует верхняя грань — число нуль, причем это число не принадлежит указанному множеству. У множества натуральных чисел N существует нижняя грань $x = 1$, которая принадлежит указанному множеству. Таким образом, верхняя (нижняя) грань числового множества может как принадлежать, так и не принадлежать этому множеству.

Определение 3. Числовое множество A называется ограниченным, если оно ограничено и снизу, и сверху. Заметим, что любой отрезок является ограниченным множеством, так как нижней гранью этого множества является левый конец отрезка, а верхней гранью — правый конец.

Неограниченные числовые множества не имеют хотя бы одной из границ. Примером неограниченного множества является любой неограниченный промежуток.

1.3.3. Числовая плоскость

Выше было сказано, что действительные числа можно изображать точками прямой. Аналогично упорядоченные пары действительных чисел можно изображать точками координатной плоскости. Поэтому целесообразно множество упорядоченных пар действительных чисел называть числовой плоскостью, а любую упорядоченную пару—точкой числовой плоскости. Числовую плоскость будем обозначать R^2. Так же как и в случае числовой прямой, на числовой плоскости можно применять геометрическую терминологию. Так, например, множество пар $(x;y)\in R^2$ или точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y=x$, есть прямая, а именно биссектриса первого и третьего координатных углов. Множество точек $(x;\ y)\in R^2$, координаты которых удовлетворяют уравнению $y=x^3$, есть кубическая парабола.

Пример. Описать на геометрическом языке множество точек $(x;\ y)$, удовлетворяющих уравнению $(x-2)(y+4)=0$.

Так как или $x-2=0$, или $y+4=0$, то заданное множество есть объединение множеств точек двух прямых $x=2$ и $y=-4$

1.4. Множество комплексных чисел

1.4.1. Комплексные числа

Для решения любого алгебраического уравнения множества действительных чисел недостаточно. Действительно, на множестве действительных чисел не имеют решения квадратные уравнения с отрицательными дискриминантами, например: $x^2+1=0$, $x^2+x+1=0$ и т. д. Для преодоления указанного затруднения вводят множество комплексных чисел, которое включает в себя в качестве подмножества множество действительных чисел. Поскольку мы хотим, чтобы в множестве комплексных чисел уравнение $x^2+1=0$ имело решение, нужно ввести некоторое новое число и считать его решением этого уравнения. Будем обозначать это новое число символом (буквой) i и называть мнимой единицей. Таким образом, для числа i справедливо равенство $i^2+1=0$, или $i^2=-1$. Далее следует пополнить множество действительных чисел новыми числами bi, их называют мнимыми или чисто мнимыми и считают произведениями действительных чисел b на мнимую единицу i. Наконец, сумму действительного числа a и мнимого числа bi будем записывать в виде $a+bi$ (или, что то же самое, $a+ib$).

Определение. Комплексными числами называются выражения вида $a+bi$ (a и b — действительные числа, i — символ мнимой единицы). Для комплексных чисел вводятся понятия равенства и операции сложения и умножения:

а) два комплексных числа a_1+b_1i и a_2+b_2i равны тогда и только тогда, когда $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$, б) суммой чисел $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$ называется число $(a_1 + a_2)+(b_1 + b_2)i;$

в) произведением чисел $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$ называется число $\left(a_1 a_2 - b_1 b_2\right) + \left(a_1 b_2 + a_2 b_1\right) i$.

Таким образом, сложение и умножение комплексных чисел выполняются по формулам

$$\left(a_1 + b_1 i\right) + \left(a_2 + b_2 i\right) = \left(a_1 + a_2\right) + \left(b_1 + b_2\right) i, \qquad (1.4.1.1)$$

$$\left(a_1 + b_1 i\right)\left(a_2 + b_2 i\right) = \left(a_1 a_2 - b_1 b_2\right) + \left(a_1 b_2 + a_2 b_1\right) i. \qquad (1.4.1.2)$$

Положим в формуле (1.4.1.2) $a_1 = a_2 = 0$ и $b_1 = b_2 = 1$. Тогда получаем соотношение

$$ii = i^2 = -1, \qquad (1.4.1.3)$$

которое обеспечивает существование решения уравнения $x^2+1==0$. Формула (1.4.1.2) не нуждается в запоминании, так как получается автоматически, если формально перемножать двучлены $a_2 + b_2 i$ и $a_2 + b_2 i$ по обычному правилу перемножения двучленов и заменить в соответствии с формулой (1.4.1.3) i^2 на — 1.

Комплексные числа часто обозначают одной буквой, причем обычно используют для этого букву z или ω, иногда, с индексами, например: z_1, z_2, ω_0, Запись $z=a+bi$ означает, что комплексное число $a+bi$ обозначено буквой z.

Легко убедиться в том, что введенные операции сложения (1.4.1.1) и умножения (1.4.1.2) обладают следующими свойствами:

1. Коммутативное (переместительное) свойство сложения:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1.$$

2. Ассоциативное (сочетательное) свойство сложения:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + \left(z_2 + z_3\right)$$

3. Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 существует комплексное число z, такое, что $z_1 + z = z_2$. Это число называется разностью чисел z_2 и z_1 и обозначается $z = z_2 - z_1$.

4. Коммутативное (переместительное) свойство умножения:

$$z_1 z_2 = z_2 z_1.$$

5. Ассоциативное (сочетательное) свойство умножения:

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3).$$

6. Для любых комплексных чисел $z_1 \neq 0 + 0i$ и z_2 существует число z, такое, что $z_1 z = z_2$. Это число называется частным от деления комплексных чисел z_2 и z_1 и обозначается $z = \dfrac{z_2}{z_1}$. Деление на комплексное число 0+0i, которое называется нулем, невозможно.

7. Дистрибутивное (распределительное) свойство:

$$z_1 \left(z_2 + z_3 \right) = z_1 z_2 + z_1 z_3. \qquad (1.4.1.4)$$

Все перечисленные свойства операций сложения и умножений непосредственно вытекают из формул (1.4.1.1) и (1.4.1.2), дающих определений этих операций, и равенства комплексных чисел. Для примера докажем свойство 7.

Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, $z_3 = a_3 + b_3 i$. Вычисляем левую часть равенства (1.4.1.4):

$$z_1 \left(z_2 + z_3 \right) = \left(a_1 + b_1 i \right) \left(a_2 + a_3 + \left(b_2 + b_3 \right) i \right) =$$
$$= a_1 \left(a_2 + a_3 \right) - b_1 \left(b_2 + b_3 \right) + \left(b_1 \left(a_2 + a_3 \right) + a_1 \left(b_2 + b_3 \right) \right) i =$$
$$= a_1 a_2 + a_1 a_3 - b_1 b_2 - b_1 b_3 + \left(b_1 a_2 + b_1 a_3 + a_1 b_2 + a_1 b_3 \right) i. \qquad (1.4.1.5)$$

Вычисляем правую часть равенства (1.4.1.4):

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 = \left(a_1 + b_1 i \right) \left(a_2 + b_2 i \right) + \left(a_1 + b_1 i \right) \left(a_3 + b_3 i \right) =$$
$$= a_1 a_2 - b_1 b_2 + \left(a_1 b_2 + b_1 a_2 \right) i + a_1 a_3 - b_1 b_3 + \left(a_1 b_3 + b_1 a_3 \right) i =$$
$$= a_1 a_2 - b_1 b_2 + a_1 a_3 - b_1 b_3 + \left(b_1 a_2 + b_1 a_3 + a_1 b_2 + a_1 b_3 \right) i. \qquad (1.4.1.6)$$

Из соотношений (1.4.1.5) и (1.4.1.6) согласно определению равенства комплексных чисел вытекает, что равенство $z_1 \left(z_2 + z_3 \right) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ имеет место.

Справедливость свойств 1—7 означает, что сложение и умножение комплексных чисел подчиняются тем же законам, что и сложение, и умножение, действительных чисел.

Более того, введенные операции сложения и умножения позволяют рассматривать комплексные числа как обобщение действительных чисел, а на действительные числа смотреть как на частный случай комплексных чисел. В самом деле, рассмотрим не все комплексные числа, а только комплексные числа вида $a+0i$. Из формул (1.4.1.1) и (1.4.1.2) видно, что в результате операций сложения и умножения (то же верно и для вычитания и деления) таких чисел всегда получаются числа такого же вида. Кроме того, видно, что правила действий с комплексными числами вида $a + 0i$ полностью совпадают с соответствующими правилами действий с действительными числами. Эти два обстоятельства и дают возможность отождествить комплексное число $a + 0i$ действительным числом a и считать, что $a + 0i=a$. Например, $0 + 0i=0$, $1+0i=1$, $—1 +0 i= —1$.

Множество всех комплексных чисел обозначается C. Множество (всех действительных чисел R является подмножеством множества комплексных чисел, т. е. $R \subset C$. Действительное число a. называют действительной частью комплексного числа $a + bi$. Действительное число b называют мнимой частью комплексного числа $a + bi$.

Согласно определению два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ равны тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$, т. е. когда одновременно равны и действительные и мнимые части этих чисел. Таким образом, одно равенство $z_1=z_2$ комплексных чисел равносильно двум равенствам $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$ действительных чисел. Заметим еще, что понятия «больше», «меньше» для комплексных чисел нельзя определить. Поэтому записи $z>0$, $4 + 2i<2 + 4i$ и им подобные не имеют смысла.

Числа $a + bi$ и $a - bi$, т. е. числа, отличающиеся только знаком мнимой части, называются сопряженными комплексными числами. Принято число, сопряженное числу z, обозначать $\overline{z}$. Применяя формулы (1.4.1.1) и (1.4.1.2), находим:

$$z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a, \tag{1.4.1.7}$$

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2, \tag{1.4.1.8}$$

т. е. сумма $z + \overline{z}$ и произведение $z \cdot \overline{z}$ сопряженных чисел являются действительными числами.

Пример 1. Даны комплексные числа $z_1 = -1 + 3i$ и $z_2 = 5 + 2i$. Найти их сумму и разность.

$z_1 + z_2 = (-1 + 3i) + (5 + 2i) = -1 + 3i + 5 + 2i = 4 + 5i$.

$z_2 - z_1 = (5 + 2i) - (-1 + 3i) = 5 + 2i + 1 - 3i = 6 - i$.

Пример 2. Даны комплексные числа $z_1 = 1+i$ и $z_2 = 2-i$. Найти их произведение и частное.

$z_1 z_2 = (1 + i)(2 - i) = 2 - i + 2i - i^2 = 2 + i + 1 = 3 + i$ Умножим числитель и знаменатель дроби $\frac{z_2}{z_1} = \frac{2 - i}{1 + i}$ на одно и то же комплексное число $(1-i)$, сопряженное знаменателю этой дроби. Тогда получим:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{(2 - i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{2 - i - 2i - 1}{1 + 1} = \frac{1 - 3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i.$$

Пример 3. Найти комплексное число $z = \frac{(2 - i)(1 + 2i)}{1 + i}$.

Перемножив числа, стоящие в числителе, получим:

$$z = \frac{2 + 4i - i - 2i^2}{1 + 1} = \frac{4 + 3i}{1 + i}.$$

Умножим числитель и знаменатель дроби $\frac{4 + 3i}{1 + i}$ на число, сопряженное знаменателю, т. е. на $(1 - i)$. Тогда получим:

$$z = \frac{(4 + 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{4 - 4i + 3i - 3i^2}{1 + 1} = \frac{7 - i}{2} = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}i.$$

1.4.2. Модуль комплексного числа

Определение. Модуль комплексного числа $z = a + bi$ обозначается $|z|$ и определяется по формуле

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (1.4.2.1)$$

Например, если z=1—2i, то $|z| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$; если z=—2+3i, то $|z| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$. Из определения следует, что модуль комплексного числа является действительным числом, причем для него выполняется неравенство

$$|z| \geq 0. \qquad (1.4.2.2)$$

Заметим, что равенство нулю имеет место только в случае z=0, т. е. a=b=0. Сравнивая формулу (1.4.2.1) и формулу (1.3.1.8), находим:

$$|z| = |\overline{z}| = \sqrt{z\overline{z}}, \qquad (1.4.2.3)$$

т. е. модули сопряженных чисел равны друг другу.

Легко доказать, что

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|. \qquad (1.4.2.4)$$

Согласно формуле (1.3.1.2) имеем $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$. По определению модуля

$$|z_1 z_2|^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 =$$

$$= a_1^2 a_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + b_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2 =$$

$$= a_1^2 \left(a_2^2 + b_2^2\right) + b_1^2 \left(a_2^2 + b_2^2\right) =$$

$$= \left(a_1^2 + b_1^2\right)\left(a_2^2 + b_1^2\right) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

откуда и следует формула (1.4.2.4).

Аналогично доказывается, что

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0. \qquad (1.4.2.5)$$

Пример. Даны комплексные числа $z_1 = -1 + 3i$ и $z_2 = 5 + 2i$. Вычислить модуль их произведения.

Вычисляем $|z_1| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$. Аналогично $|z_2| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$ Согласно формуле (1.4.2.4) имеем $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{29} = \sqrt{290}$.

Для действительного числа z = a+0i модуль совпадает с абсолютной величиной числа: $|z| = |a+0\,i| = \sqrt{a^2} = |a|$.

1.5. Комплексная плоскость. Аргумент комплексного числа. Подмножества комплексных чисел

1.5.1. Комплексная плоскость

Геометрическую терминологию и геометрические соображения можно с успехом использовать при изучении комплексных чисел, если каждое комплексное число $a + bi$ изображать точкой M (a; b) координатной плоскости, такой, что ее абсцисса равна действительной части комплексного числа, а ордината — мнимой части. В свою очередь, каждой точке M (a; b) координатной плоскости отвечает комплексное число $a + ib$ (рис. 1.8 а)). Координатную плоскость называют при этом комплексной плоскостью. Ось абсцисс называется действительной осью, так как на ней расположены точки, соответствующие числам $a + 0i$, т. е. соответствующие действительным числам. Ось ординат называется мнимой осью: на ней лежат точки, соответствующие чисто мнимым комплексным числам $0 + bi$.

Из рисунка 1.8, а видно, что введенная ранее величина — модуль комплексного числа $|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$ — равна длине вектора $\overrightarrow{OM}$, т. е. вектора, начало которого находится в начале координат O (0; 0), а конец — в точке M (a; b).

1.5.2. Аргумент комплексного числа

Комплексные числа z, имеющие один и тот же модуль $|z|=r$, соответствуют, очевидно, точкам комплексной плоскости, расположенным на окружности радиуса r с центром в точке z=0, т. е. в точке O (рис. 1.8, б). Если $|z| \neq 0$, то существует, следовательно, бесконечное множество чисел с данным модулем. Модуль, равный нулю, имеет только одно комплексное число, а именно z=0.

Геометрически очевидно, что, для того чтобы из множества комплексных чисел с данным модулем $|z| = r \neq 0$ выделить какое-либо конкретное число, достаточно задать направление ректора $\overrightarrow{OM}$ (например, задать угол φ, см. рис. 1.8, б).

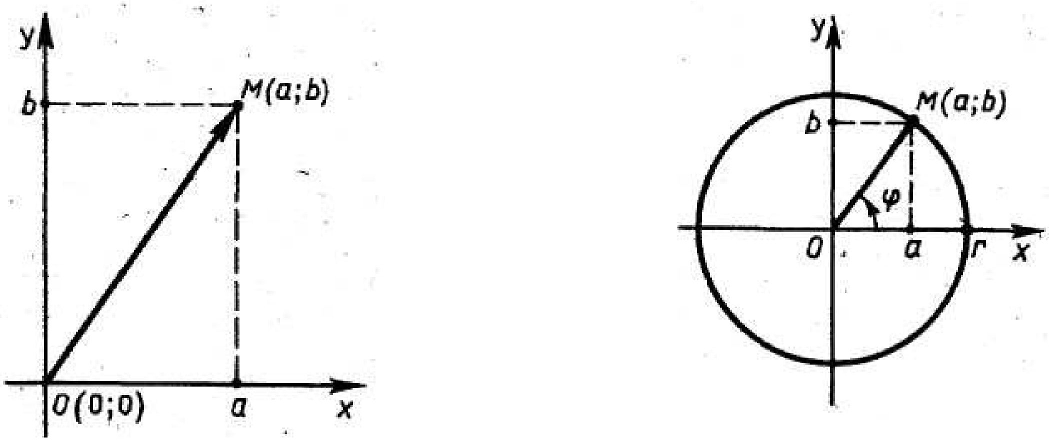
Определение. Аргументом комплексного числа $z = a + bi \neq 0$ называется угол между положительным направлением действительной оси и радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ с началом в точке *0*.(0; 0) и концом в точке $M(a;\ b)$. Угол считается положительным, если отсчет ведется против часовой стрелки, и отрицательным, если отсчет производится по часовой стрелке.

Для аргумента комплексного числа $z = a + bi$ используется обозначение arg$z$ или arg(a+bi). Заданием модуля и аргумента комплексное число определяется полностью. Для числа z = 0 аргумент не определяется, но в этом и только в этом случае число задается только своим модулем.

Из рисунка 1.8, б находим, что если заданы модуль r и аргумент φ комплексного числа $z = a + bi$, то его действительная часть a и мнимая часть b определяются по формулам

$$a = r\cos\varphi,\ b = r\sin\varphi. \qquad (1.5.2.1)$$

Аргумент комплексного числа в отличие от модуля определяется неоднозначно. Действительно, если аргументом числа z является угол φ, то аргументом этого числа будет также каждый из углов $\varphi_k = \varphi + 2\pi k$, $k \in z$. Любые два аргумента комплексного числа отличаются друг от друга слагаемым, кратным 2π. Согласно формуле (1.5.2.1) эта неоднозначность не отражается на величинах действительной и мнимой частей комплексного числа.



а) б)

Рис. 1.8

Пример 1. Даны модуль комплексного числа r=2 и его аргумент $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Найти действительную и мнимую части комплексного числа.

Согласно формуле (1.5.2.1) имеем $a = r\cos\varphi = 2\cos\dfrac{\pi}{6} = 2\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, $b = r\sin\varphi = 2\sin\dfrac{\pi}{6} = 2\cdot\dfrac{1}{2} = 1$.

Пример 2. Дано комплексное число $z = 1 + i$. Найти его модуль и аргумент.

Вычисляем модуль числа $|z| = r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Теперь найдем аргумент числа z, действительная часть которого равна единице. Воспользуемся формулой (1.5.2.1) и найденным значением модуля: $1 = r\cos\varphi = \sqrt{2}\cos\varphi$, откуда $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, т.е. $\varphi = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in z$.

Рассмотрим теперь для примера ряд соотношений, задающих конкретные подмножества множества комплексных чисел *C:* Так, равенству

$$|z|=5 \qquad (1.5.2.2)$$

удовлетворяют точки комплексной плоскости, равноудаленные от начала координат, т. е. равенство (1.5.2.2) задает в комплексной плоскости окружность радиуса 5 с центром в начале координат. Двойное неравенство $1 \le |z| \le 2$ задает в комплексной плоскости множество точек, лежащих внутри и на границе кольца, образованного двумя концентрическими окружностями с центром в начале координат O (рис. 1.9). Равенству

$$\arg z = \frac{\pi}{4}$$

соответствует в комплексной плоскости множество точек, лежащих на луче, выходящем из начала координат под углом 45° к положительному направлению действительной оси (т. е. оси абсцисс). Двойное неравенство

$$\frac{\pi}{6} \le \arg z \le \frac{\pi}{3}$$

задает в комплексной плоскости множество точек, лежащих внутри и на границах углового сектора, показанного на рисунке 1.10.

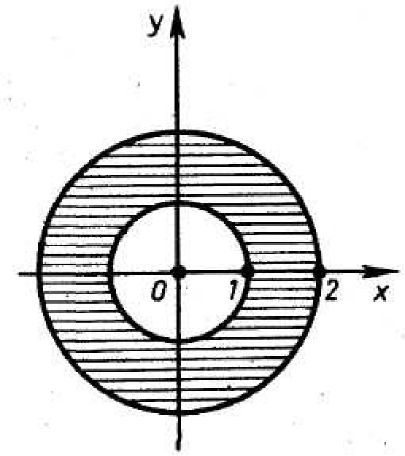


Рис. 1.9

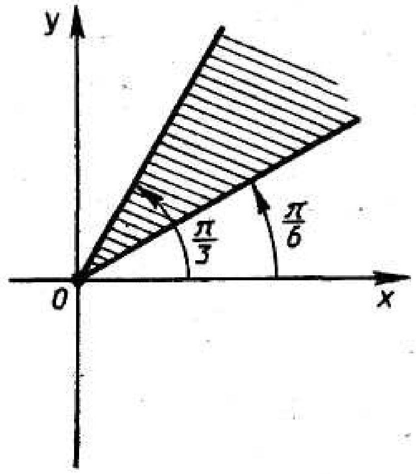


Рис. 1.10

1.5.3. Тригонометрическая форма

Введем на комплексной плоскости Oxy полярную систему координат, совместив полярную ось с действительной осью Ox, а полюс — с началом координат O. Рассмотрим комплексное число $z = x+yi$. Ему соответствует на комплексной плоскости точка *M*(*x; y*). Пусть $r\left(r>0\right)$ и φ — полярные координаты точки *M.* Полярный радиус точки *M,* т. е. ее расстояние от полюса, называется *модулем* комплексного числа z и обозначается символом $\left|z\right|$. Очевидно, $r=\left|z\right|=\sqrt{x^2+y^2}$. Полярный угол точки *M* называется *аргументом* комплексного числа *z* и обозначается символом Arg *z*. Как известно, полярный угол определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого вида 2*πk,* где *k* — любое целое число.

Выделим из всех значений аргумента одно, которое удовлетворяет неравенствам $0\le\varphi<2\pi$. Это значение называется *главным* и обозначается $\varphi=\arg z$. Следует заметить, что для *z* = 0 аргумент не определен.

Принимая во внимание формулы $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, связывающие полярные и декартовы координаты, мы можем комплексное число *z* = *x*+*yi* представить в виде

$$z=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right). \tag{2.5.3.1}$$

Эта форма записи называется *тригонометрической формой* комплексного числа.

Используя формулу Эйлера

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi,$$

комплексное число $z=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$ можно записать в так называемой *показательной* (или *экспоненциальной) форме* $z=re^{i\varphi}$, где $r=\left|z\right|$ - модуль комплексного числа, а угол $\varphi=Argz=\arg z+2k\pi\ \left(k=0,\ -1,\ 1,-2,\ 2...\right)$.

В силу формулы Эйлера, *функция* $e^{i\varphi}$ *периодическая с основным периодом* 2π. Для записи комплексного числа *z* в показательной форме, достаточно найти главное значение аргумента комплексного числа, т.е. считать $\varphi=\arg z$.

Пример 1. Записать комплексные числа $z_1=-1+i$ и $z_2=-1$ и в тригонометрической и показательной формах.

Решение. Для z_1 имеем

$$|z| = r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \ \arg z = arctg\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}, \text{ т.е. } \varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

Поэтому

$$-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Для z_2 имеем

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1, \ \arg z = \arg(-1) = \pi,$$

т.е. $\varphi = \pi$. Поэтому $-1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi}$.

Пример 2. Представить в тригонометрической форме следующие числа: 1) $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$; 2) $z_2 = i$; 3) $z_3 = 5$.

Решение. 1) Для числа $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ имеем:

$x = 1$, $y = -\sqrt{3}$, $r = \sqrt{(1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$, $\cos\varphi = x/r = 1/2$, $\sin\varphi = y/r = -\sqrt{3}/2$.

Этим значениям синуса и косинуса соответствует значение аргумента $\varphi = 5\pi/3$. Таким образом,

$$z_1 = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right).$$

2) Для $z_2 = i$ имеем $x = 0, y = 1$, откуда $r = 1$; $\cos\varphi = 0$, $\sin\varphi = 1$, т.е. $\varphi = \pi/2$. Следовательно,

$$z_2 = i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

3) Для $z_3 = 5$ имеем $r = 5$, $\varphi = 0$; таким образом,

$$z_3 = 5 = 5(\cos 0 + i\sin 0).$$

Покажем, как умножаются и делятся комплексные числа, заданные в тригонометрической форме. Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$=r_1r_2\left[\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2\right)+\left(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2\right)i\right]=$$

$$=r_1r_2\left[\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right].$$

Таким образом,

$$z_1z_2=r_1r_2\left[\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right]. \qquad (2.5.3.2)$$

Из формулы (2.5.3.2) следует, что *при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.* Это правило сохраняется для любого конечного числа *n* множителей. В частности, когда все *n* множителей одинаковы, получим

$$z^n=\left[r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)\right]^n=r^n\left(\cos n\varphi+i\sin n\varphi\right). \qquad (2.5.3.3)$$

Формула (2.5.3.3) называется *формулой Муавра**.

Пример 3. Возвести число $z=1-i$ в восьмую степень.

Решение. Представим данное число в тригонометрической форме:

$$z=1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

По формуле Муавра получим

$$z^8=\left(1-i\right)^8=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right]^8=$$

$$=\left(\sqrt{2}\right)^8\left[\cos\left(8\cdot\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(8\cdot\frac{7\pi}{4}\right)\right]=16\left(\cos 14\pi+i\sin 14\pi\right)=16.$$

При делении комплексных чисел z_1 и z_2 получим

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1\left(\cos\varphi_1+\sin\varphi_1\right)}{r_2\left(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\right)}=\frac{r_1}{r_2}\frac{\left(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1\right)\left(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\right)}{\left(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\right)\left(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\right)}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\frac{\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2\right)\left(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2\right)}{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\varphi_2-\varphi_1\right)+i\sin\left(\varphi_2-\varphi_1\right)\right].$$

Таким образом,

* А. Муавр (1667—1754)—английский математик.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i\sin(\varphi_2 - \varphi_1)\right]. \qquad (2.5.3.4)$$

Из формулы (2.5.3.4) следует, что *при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.*

Извлечение корня *n*-й степени из комплексного числа есть действие, обратное возведению комплексного числа в я-ю степень. Следовательно, если $\omega = \sqrt[n]{z}$, то $z = \omega^n$. Пусть $z = r(\cos\varphi + \sin\varphi)$ и $\omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. По формуле Муавра получим

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \left[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)\right]^n = \rho^n(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Отсюда $r = \rho^n$, $n\theta = \varphi + 2k\pi$.

Так как *к* и ρ —положительные числа, то $\rho = \sqrt[n]{r}$, где корень понимается в арифметическом смысле.

Из равенства $n\theta = \varphi + 2k\pi$ получим $\theta = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$. Следовательно,

$$\rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right). \qquad (2.5.3.5)$$

Придавая *k* последовательно значения 0, 1, 2, ..., *n*— 1, получим *n* различных значений $\sqrt[n]{z}$. Все они имеют одинаковый модуль. Если *k*>*n*—1, то значения θ отличаются от полученных ранее на числа, кратные 2π, и значения $\sqrt[n]{z}$ повторяются.

Пример 4. Найти $\sqrt{-1}$.

Решение. Представим число —1 в тригонометрической форме: $-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$. По формуле (2.5.3.5) имеем

$$\sqrt{-1} = \sqrt{1(\cos\pi + i\sin\pi)} = \sqrt{1}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{2}\right).$$

Придавая *k* значения 0 и 1, получим два различных значения корня ε_0 и ε_1:

$$\varepsilon_o = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = i\,,\ \varepsilon_1 = 1\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}\right) = -i\,.$$

Пример 5. Как известно, квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ в случае, если его дискриминант $D = b^2 - 4ac$ отрицателен, не имеет действительных корней. Покажем, что в этом случае уравнение имеет два комплексных сопряженных корня. Действительно, по известной формуле находим $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Считая, что $D<0$ и полагая $D = -d^2 \quad (d > 0)$, получим

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-d^2}}{2a}.$$

Но $\sqrt{-d^2} = \sqrt{d^2 \cdot (-1)} = \sqrt{d^2} \cdot \sqrt{-1} = \pm di$. Следовательно,

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm di}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{d}{2a} i\,.$$

В частности, уравнение $x^2 + 6x + 13 = 0$ имеет следующие комплексные корни: $x_1 = -3 + 2i$, $x_2 = -3 - 2i$.

2. ФУНКЦИИ. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛЫ

2.1. Функции

2.1.1. Понятие функции

Одним из основных математических понятий является понятие функции. В этом понятии находит отражение тесная связь математики с различными явлениями реальной действительности. Понятие функции связано с установлением зависимости (связи) между элементами двух множеств. Например, пусть A — множество правильных многоугольников со стороной, равной 3 см, а B — множество периметров этих многоугольников. Ясно, что каждому из данных многоугольников можно сопоставить определенное число — его периметр. Так, треугольнику из множества A сопоставляется число 9, квадрату — число 12, пятиугольнику — число 15 и т. д. В этом случае говорят, что между элементами множества A и элементами множества B установлена функциональная зависимость, выражаемая правилом (законом): каждому правильному многоугольнику соответствует число — его периметр.

Если каждому элементу x множества A по правилу f соответствует единственный элемент $\boldsymbol{y}$ множества B, то говорят, что на множестве A задана функция $f(x)$, и пишут: $y = f(x)$, $x \in A$. В этом случае x называют аргументом, а y — значением функции. Множество A называется областью определения функции, а множество B — множеством значений функции.

Часто для функции f применяют и такое обозначение: $f\colon A \to B$. Наряду с буквой f для обозначения функции используются и другие буквы: $u, v, g, \varphi, \psi, \ldots, F, \Phi, \Psi, \ldots$ и т. д.

2.1.2. Числовые функции. Способы задания функции

Пусть задана функция $f{:}A \to B$. Если элементами множеств A и B являются действительные числа, т. е. $A \subset R$ и $B \subset R$, то функцию f называют числовой функцией. Как правило, мы будем иметь дело с числовыми функциями, поэтому для краткости будем именовать их просто функциями.

Функция будет задана, если заданы множества A и B и указано правило f, по которому для произвольного $x \in A$ можно найти (вычислить) соответствующее ему число $y \in B$. Часто это правило задают формулой, например, $y = 2x + 5$ или $y = \dfrac{x^2 + 7}{2x - 3}$ и т. д. Указанный способ задания функции при помощи формулы называется аналитическим способом. Заметим, что одной и той же формулой можно задавать различные функции в зависимости от указания множества A. Так, функции $y = x$, $x \in R$ и $y = x$, $x \in N$, различные: первая — линейная функция, вторая — числовая последовательность натуральных чисел.

Если функция, заданная формулой $y = f(x)$, определена на множестве всех значений переменной x, при которых выражение $f(x)$ имеет смысл, то ее область определения обычно не указывается. Например, если числовая функция $f(x) = x^2 — 3x+7$ определена для всех $x \in R$, то она обычно задается формулой без указания области ее определения; если же функция $f(x) = x^2 — 3x + 7$ задана на некотором подмножестве множества R, то это специально оговаривается. Если функция задана формулой $y = \dfrac{3}{x - 2}$ без указания области ее определения, то предполагается, что область определения этой функции — множество всех действительных чисел, кроме 2 (при $x = 2$ выражение $y = \dfrac{3}{x - 2}$ не имеет смысла).

Иногда функции на разных промежутках, входящих в область определения A, задаются различными формулами. Такова, например, функция

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & x>0, \\ x^3, & x\le 0. \end{cases} \qquad (2.1.2.1)$$

В случаях, когда формулу, по которой каждому $x \in A$ сопоставляется $x \in B$, записать трудно (или невозможно), пользуются словесным описанием способа, задающего функцию. Рассмотрим в качестве примера следующую функцию: каждому действительному числу x ставится в соответствие наибольшее целое число, не превосходящее x. Эта функция называется целой частью x и обозначается $[x]$.

На практике часто пользуются графическим способом задания функции в тех случаях, когда задать ее аналитически трудно. Кроме того, при изучении многих реальных процессов с помощью приборов получаются кривые, по которым можно судить об изучаемой функции. Примерами графического описания функций могут служить, например, показания осциллографа, электрокардиографа и т. д. Графики функций можно наблюдать на дисплеях компьютеров.

В математике часто используют графический способ изображения функции даже в тех случаях, когда известна формула, определяющая функцию. Числовая функция $f(x)$, $x \in A$, полностью определяется заданием множества точек $M(x; f(x))$, $x \in A$, на числовой (координатной) плоскости. Это множество точек называется графиком данной функции f. Задать функцию графически — значит задать (изобразить) ее график. На рисунке 2.1 показан график функции (2.1.2.1), где стрелка означает, что точка M (0; 2) не принадлежит графику. Изображенный на рисунке 2.2 график функции $y = [x]$ создает легко воспринимаемый и хорошо запоминающийся «зрительный образ» этой функции.

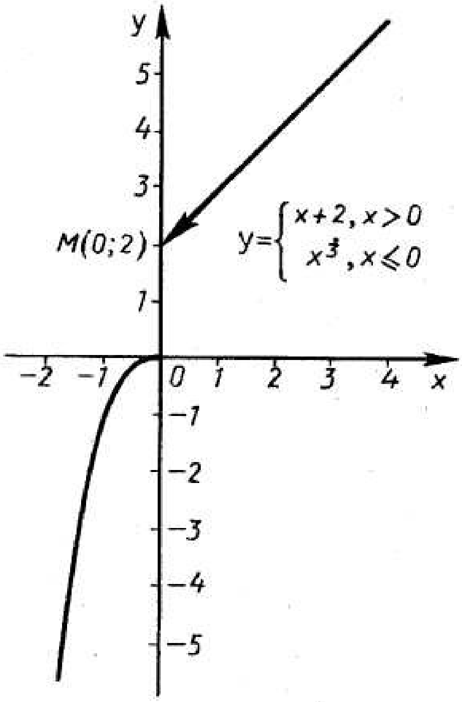


Рис. 2.1

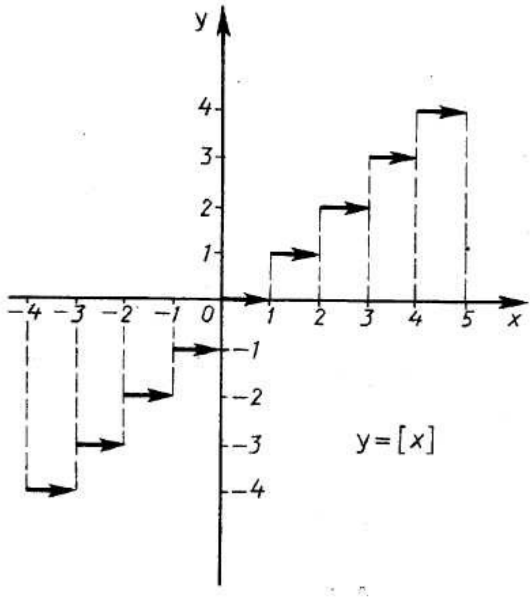


Рис. 2.2

Функции можно задавать с помощью таблиц (табличный способ). В этом случае приводится таблица, в которой для значения аргумента указывается соответствующее значение функции. Данные для таблиц могут быть получены из опыта или с помощью некоторых математических расчетов. Например, таблицы значений элементарных функций (таблицы квадратных и кубических корней, логарифмические таблицы, таблицы тригонометрических функций и т. д.). Метеорологи, например, составляют таблицы выпавших осадков в различных пунктах земного шара.

В последнее время получило широкое распространение задание функции с помощью компьютерных программ. При проведении расчетов на компьютерах нужные значения аргументов или требуемые значения функций в готовом виде закладываются в память компьютера.

2.1.3. Ограниченность, монотонность, четность и периодичность функций

Определение 1. Функция

$$y = f(x),\ x \in A \tag{2.1.3.1}$$

называется ограниченной, если существует такое число *M,* что для каждого $x \in A$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \le M\ . \tag{2.1.3.2}$$

В противном случае функция называется неограниченной. Геометрически условие (2.1.3.2) означает, что график ограниченной функции (2.1.3.1) размещается на координатной плоскости в горизонтальной полосе $-M \le y \le M$. На рисунке 2.3 показан график функции $y = x - [x]$, $x \in R$, целиком расположенный в горизонтальной полосе $0 \le y \le 1$. Поэтому данная функция является ограниченной. На рисунке 2.4 показан график функции $y = \frac{1}{x^2}$, являющейся неограниченной. В предыдущем пункте параграфа также были

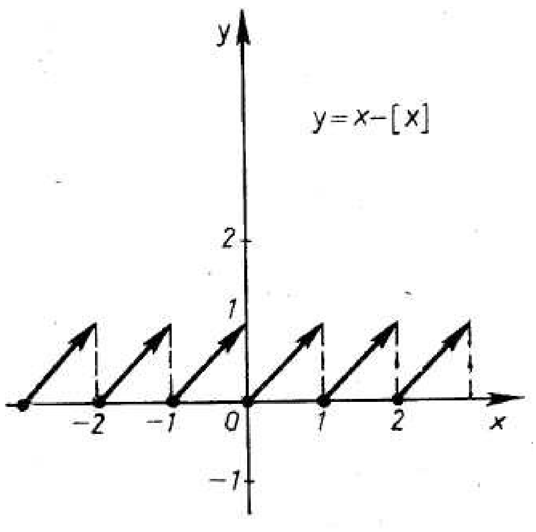


Рис. 2.3

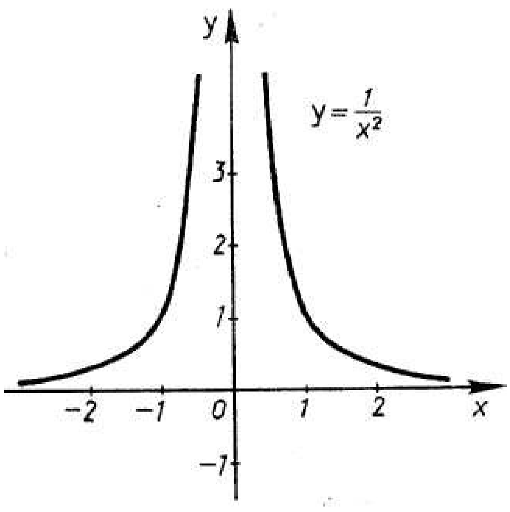


Рис. 2.4

рассмотрены неограниченные функции (см. рис. 2.1 и 2.2).

Определение 2. Функция *f (x),* $x \in A$, называется неубывающей, если для любых x_1 и x_2 из *A,* таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство

$$f(x_1) \le f(x_2),$$

Если же $f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется возрастающей.

Определение 3. Функция $f(x)$, $x \in A$, называется невозрастающей, если для любых x_1 и x_2 из *A*, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство

$$f(x_1) \geq f(x_2)$$

Если же $f(x_1) > f(x_2)$, то функция называется убывающей.

Строго невозрастающие, возрастающие, неубывающие и убывающие функции называются монотонными функциями.

Пример. Показать, что функция $f(x) = x^3$, $x \in R$, является возрастающей.

Пусть $x_1 < x_2$. Тогда $f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1) \cdot (x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2)$. Так как $x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2 > 0$ для любых x_1 и $x_2 \neq x_1$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т. е. $f(x_1) < f(x_2)$. График функции $y = x^3$ показан на рисунке 2.5.

Аналогично можно доказать, что функция $y = [x]$, $x \in R$, является возрастающей (рис. 2.2), функция $y = -x^3$, $x \in R$, является строго убывающей (рис. 2.6, *a*), функция $f(x) = -[x]$, $x \in R$, является убывающей (рис, 2.6, *b*), а функция $y = x - [x]$ $x \in R$, свойством монотонности не обладает (рис. 2.3).

Определение 4. Функция $f(x)$, $x \in A$, называется четной (нечетной), если для любого *x* из множества *A* выполняется равенство

$$f(-x) = f(x) \qquad (f(-x) = -f(x)).$$

Функция $y = x^3$, $x \in R$, график которой показан на рисунке 2.5, является

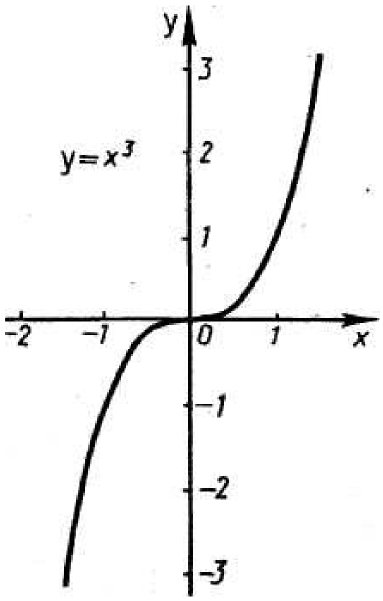


Рис. 2.5

нечетной, функция $y=\frac{1}{x^2}$ (см. рис. 2.4) — четной, а функции, графики которых показаны на рисунках 2.1, 2.2, 2.3, свойствами четности либо нечетности не обладают. Другими примерами четных функций являются следующие функции, определенные на всей числовой оси:

$$f(x) = x^4,\ f(x)=-|x|,\ f(x)= |x|-1.$$

Четной является функция $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, определенная на отрезке [—2;2], а также функция $f(x)=\frac{1}{x^4}$, $x\in R$, $x\neq 0$.

Нечетными функциями, определенными на всей числовой оси, являются следующие функции:

$$f(x) = x,\ f(x)=-x^3,\ f(x) = x\,|x|.$$

Нечетной является функция $f(x)=x\sqrt{9-x^2}$, определенная на отрезке [—3; 3], а также функция $y=\frac{1}{x}$, $x\in R$, $x\neq 0$.

Как видно из определений четной и нечетной функций, областям определения таких функций вместе с числом x принадлежит и число — x.

Так как график четной функции симметричен относительно оси ординат (см. рис. 2.4), а график нечетной функции симметричен относительно начала координат (см. рис. 2.5 и 2.6, *а*), то достаточно построить их график лишь для $x\geq 0$ и затем отразить его симметрично оси ординат или начала координат.

Определение 5. Функция $y = f(x)$, $x\in A$, называется периодической, если существует число $T\neq 0$, такое, что для любого x множества A выполняется равенство

$$f(x\pm T)=f(x).$$

Число T называется периодом функции f. Среди функций, графики которых показаны на рисунках 2.1—2.6, только функция $y = x - [x]$, $x\in R$, обладает свойством периодичности. Ее период T равен единице. Про остальные функции говорят, что они непериодические.

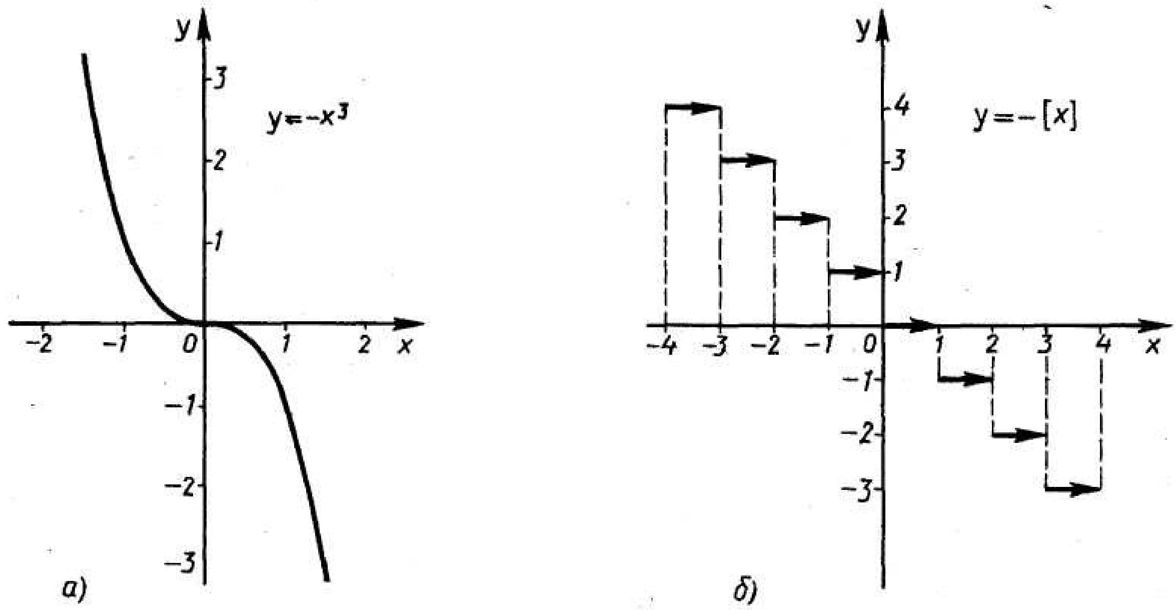


Рис. 2.6

2.2. Обратная функция. Простейшие элементарные функции

2.2.1. Функция, обратная данной функции

Пусть задана функция $y = f(x)$, $x \in A$, и пусть B — множество значений данной функции. Функция f ставит в пару любому элементу x множества A единственный элемент y множества B. Потребуем дополнительно, чтобы разным элементам x_1 и x_2 множества A функция f ставила в пару разные элементы y_1 и y_2 множества B. Тогда можно рассмотреть функцию, которая любому элементу y множества B ставит в пару единственный элемент x множества A, такой, что $f(x) = y$. Эту функцию называют функцией, обратной данной функции f, и обозначают f^{-1} или $x = f^{-1}(y)$, $y \in B$. Для функции f^{-1} множество A является множеством значений, а множество B — областью определения.

Пример 1. Для функций $y = x^2$, $x \in [0;1]$ и $y = x^2$, $x \in [-1;1]$, найти обратные к ним функции, если последние существуют.

Для функции $y = x^2$, $x \in [0;1]$, функция $x = \sqrt{y}$, $y \in [0;1]$, является обратной функцией (рис. 2.7).

У функции $y = x^2$, $x \in [-1;1]$, не существует обратной, так как разным x_1 и x_2 может соответствовать один и тот же *y*. Например, числам $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = -\frac{1}{2}$ соответствует одно и то же число $y = \frac{1}{4}$ (рис. 2.8).

Функция называется обратимой, если для нее существует обратная функция. Очевидно, чтобы задать функцию f^{-1}, обратную данной функции *f*, достаточно решить уравнение *y* = *f(x)* относительно *x* (если это возможно), выразив тем самым переменную *x* через *y*: *x* = $f^{-1}(y)$. В свою очередь, функция *f* является обратной для функции f^{-1}. Говорят, что функции *f* и f^{-1} являются взаимно обратными.

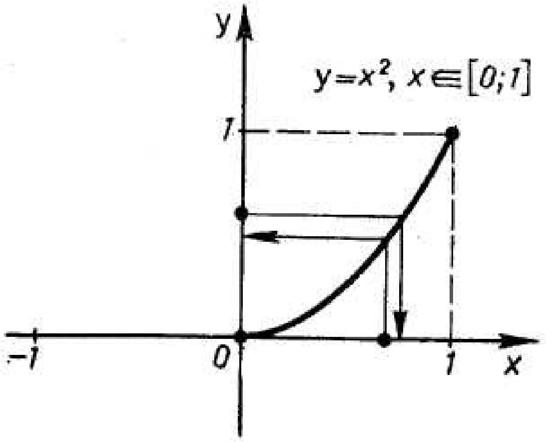


Рис. 2.7

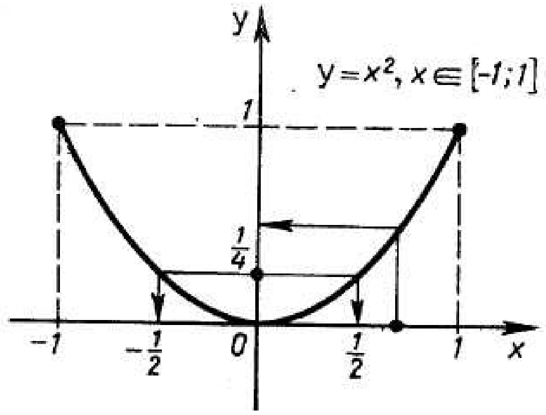


Рис. 2.8

Пример 2. Найти функцию, обратную функции

$$y = 2x - 5,\ x \in [0;5] \qquad (2.2.1.1)$$

Множеством значений функции (2.2.1.1) является отрезок [—5; 5]. Выразим *x* через *y* из уравнения $y = 2x - 5$. Тогда

$$x = \frac{y+5}{2},\ y \in [-5;5] \qquad (2.2.1.2)$$

Взаимно обратные функции (2.2.1.1) и (2.2.1.2) определяют на координатной плоскости одну и ту же прямую l, являющуюся графиком обеих этих функций (рис. 2.9). Графиком взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ является одна и та же кривая l в координатной плоскости, причем для функции $f^{-1}(y)$ значения аргументов откладываются на оси ординат, что неудобно. Поэтому принято для обратной функции f^{-1} использовать те же обозначения, что и для функции f, т. е. $y = f^{-1}(x)$, и откладывать значения аргументов обратной функции на оси абсцисс. При этом графики функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ будут симметричны друг другу относительно прямой $y = x$. Графики взаимно обратных функций $y = 2x - 5$, $x \in [0; 5]$, и $y = \frac{x+5}{2}$, $x \in [-5; 5]$ (получена из формулы (2.2.1.2) заменой обозначений), рассмотренных в примере 2, показаны на рисунке 2.10.

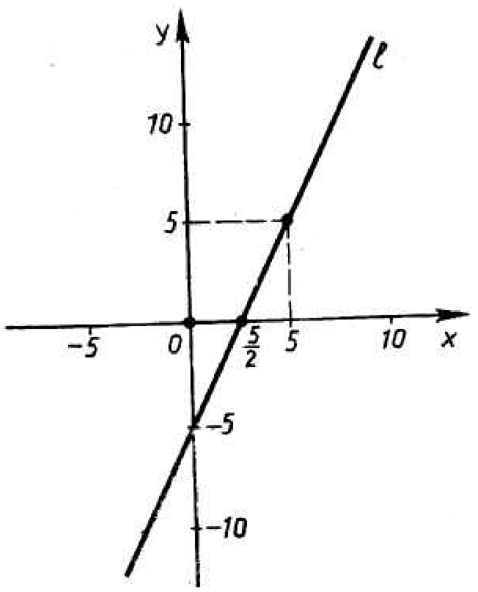


Рис. 2.9

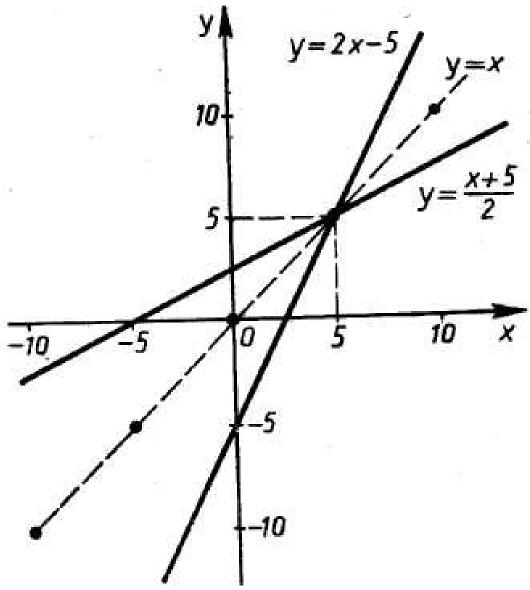


Рис. 2.10

2.2.2. Простейшие элементарные функции

В этом пункте мы рассмотрим такие простейшие элементарные функции, как степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

Для любого действительного числа α функция

$$y = x^{\alpha},\ x \in R_{+},$$

называется степенной функцией с показателем α. Если α = 0, то x^{α}= 1 для любого $x>0$. Если $\alpha \neq 0$, то множеством значений степенной функции является интервал (0; +∞). Действительно, функция принимает каждое значение $y_0 > 0$ в точке x_o = $y_0^{\frac{1}{\alpha}}$. Таким образом, степенная функция является неограниченной функцией. Степенная функция с положительным показателем возрастающая, а с отрицательным показателем убывающая. На рисунках 2.11 и 2.12 изображены

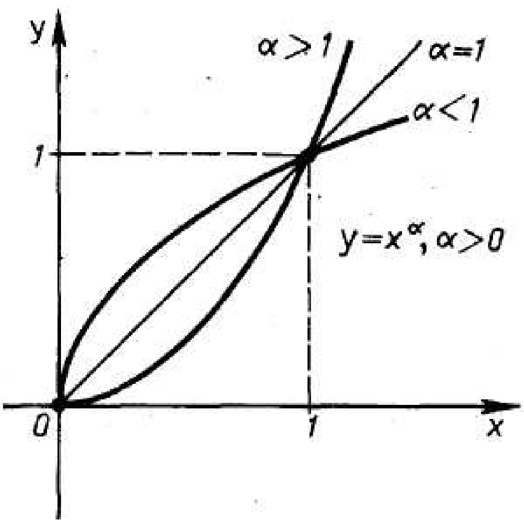


Рис. 2.11

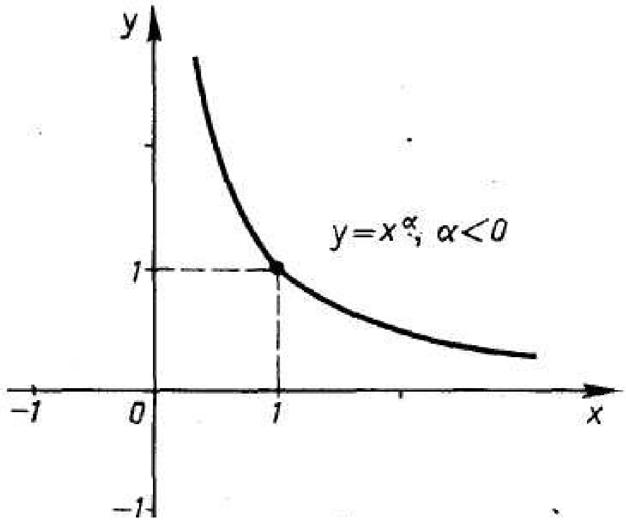


Рис. 2.12

графики степенной функции при α>1, α = 1, $\alpha \in (0;1)$ и α<0. Для некоторых α степень x^{α} определена не только для $x>0$. Например, если $\alpha = \dfrac{m}{n}$, де n — нечетное натуральное число, а m — любое натуральное число, то степенная функция $y=x^{\alpha}$ определена для любого $x \in R$. Если α= —n, где n — натуральное число, то функция x^{α} определена для любого $x \in R, x \neq 0$. Эта функция является четной, если n четное, и нечетной, если n нечетное. Для любого a>0, $a \neq 1$ функция

$$y = a^x,\ x \in R,$$

называется показательной функцией. Множеством значений показательной функции является множество R_+ всех положительных действительных чисел. Используя свойства степеней, легко доказать, что если a>1, то показательная функция возрастающая, а если 0<a<1, то убывающая. В обоих случаях функция является неограниченной.

Для любого a>0, $a \neq 1$ обратная к показательной функция

$$y = \log_a x,\ x \in R_+,$$

называется логарифмической функцией. Множество значений логарифмической функции есть множество R всех действительных чисел. Если a>1, то логарифмическая функция возрастающая, а если 0<a<1, то убывающая. Графики взаимно обратных показательной и логарифмической функций симметричны друг другу относительно прямой $y = x$ (рис. 2.13 и 2.14).

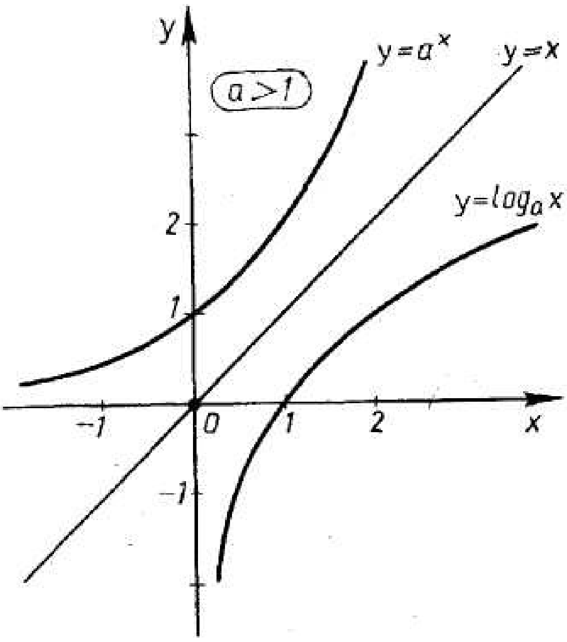


Рис. 2.13

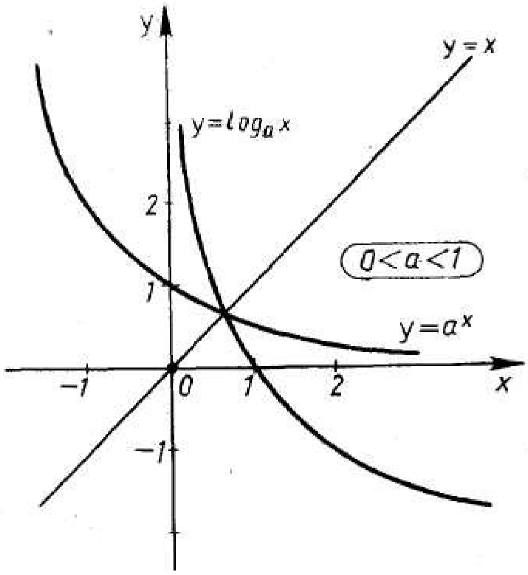


Рис. 2.14

Тригонометрические функции

$$y = \sin x\,,\ x \in R\,, \qquad\qquad y = \cos x\,,\ x \in R\,,$$

называются соответственно синусом и косинусом. Графики этих функций показаны на рисунках 2.15 и 2.16. Они целиком лежат в полосе $-1 \le y \le 1$, так как эти функции являются ограниченными.

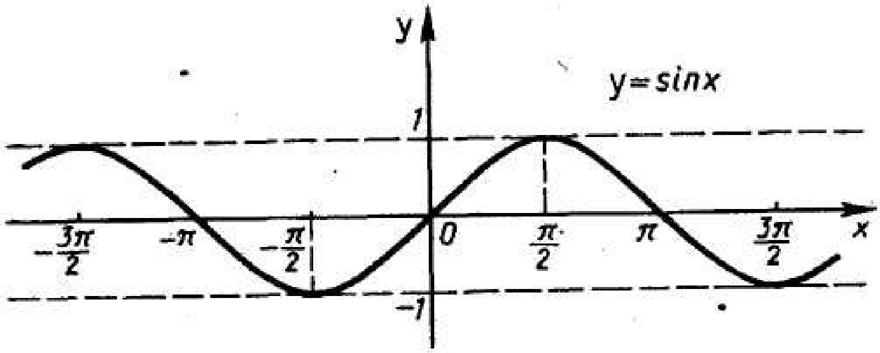


Рис. 2.15

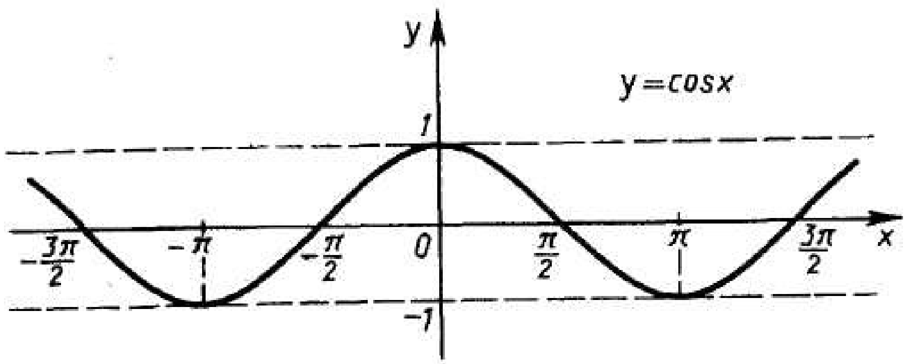


Рис. 2.16

Функция cos$x$ четная, а функция sin x нечетная. Обе эти функции периодические с периодом 2π:

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x,\ \cos(x \pm 2\pi) = \cos x$$

для любого $x \in R$. Помимо синуса и косинуса, рассматривают функции

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x},\ \ x \in R,\ \ x \ne \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \in z,\ \ ctgx = \frac{\cos x}{\sin x},\ x \in R,\ x \ne \pi k,\ k \in z,$$

называемые соответственно тангенсом и котангенсом. Графики этих функций показаны на рисунках 2.17 и 2.18. Функции tg$x$ и ctg$x$ являются нечетными, неограниченными, периодическими с периодом π функциями.

Функция $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ строго возрастает, так что разным значениям аргумента x соответствуют разные значения функции y. Функция, обратная к функции $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, называется арксинусом и обозначается

$$y = \arcsin x .$$

Она определена на отрезке [— 1; 1]. Множеством значений арксинуса является отрезок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. График функции $y = \arcsin x$, $x \in$[—1; 1], симметричен графику функции $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, относительно прямой $y=x$ (рис. 2.19). Арксинус — возрастающая, нечетная функция.

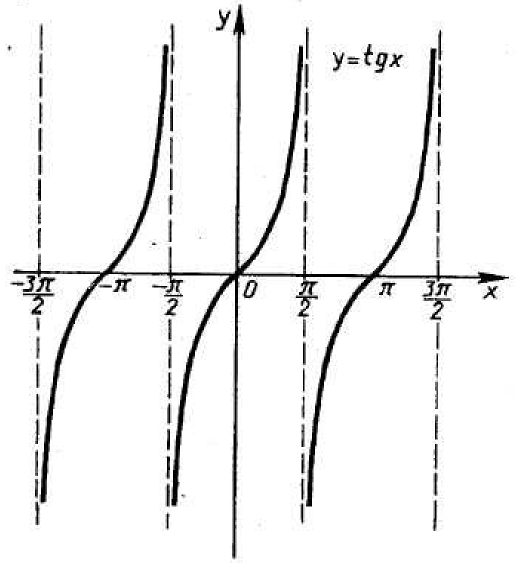


Рис. 2.17

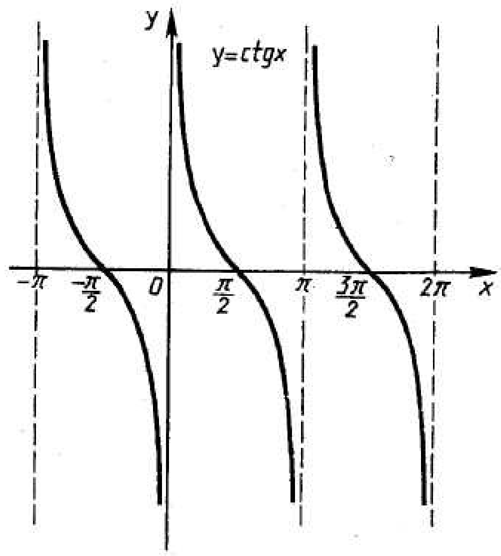
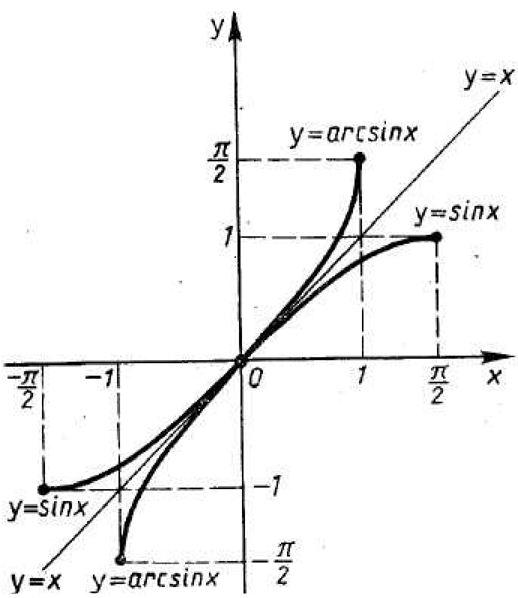


Рис. 2.18



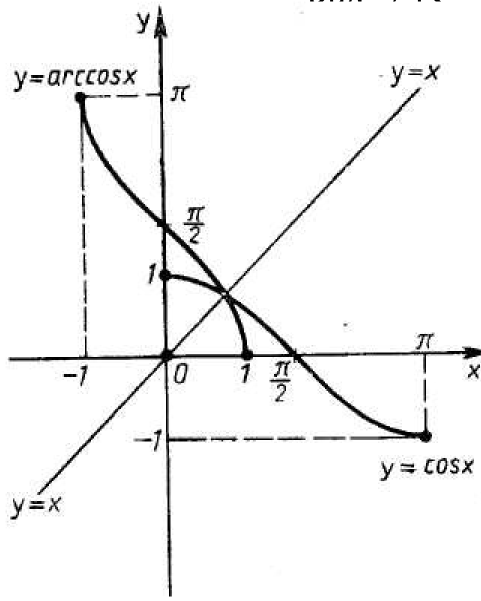


Рис. 2.19 Рис. 2.20

Функция $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ строго убывает, так что разным значениям аргумента x соответствуют разные значения функции y. Тогда можно ввести функцию, обратную к функции $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$. Эту функцию называют арккосинусом и обозначают

$$y = \arccos x.$$

Она определена на отрезке $[—1; 1]$. Множеством значений арккосинуса является отрезок $[0; \pi]$. График функции $y = \arccos x$, $x \in [—1; 1]$, симметричен графику функции $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$, относительно прямой $y = x$ (рис. 2.20). Арккосинус — убывающая функция. Свойствами четности либо нечетности эта функция не обладает.

Функция $y = tgx$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, строго возрастает, и разным значениям аргумента x соответствуют разные значения функции y. Функция, обратная к функции $y = tgx$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, называется арктангенсом и обозначается

$$y = arctgx.$$

Она определена для всех $x \in R$. Множеством значений арктангенса является интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. График функции $y = arctgx$, $x \in R$, симметричен графику функции $y = tg\ x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, относительно прямой $y = x$ (рис. 2.21). Арктангенс — возрастающая нечетная функция.

Функция $y = \text{ctg}\ x$, $x \in (0; \pi)$, строго убывает, и разным значениям аргумента x соответствуют разные значения функции y. Функция, обратная к функции $y = \text{ctg}x$, $x \in (0; \pi)$, называется арккотангенсом и обозначается

$$y = arcctgx.$$

Она определена для всех $x \in R$. Множеством значений арккотангенса является интервал (0; π). График функции $y = arcctgx$, $x \in R$, симметричен графику функции y = ctg$x$, $x \in (0; \pi)$, относительно прямой $y = x$ (рис. 2.22).

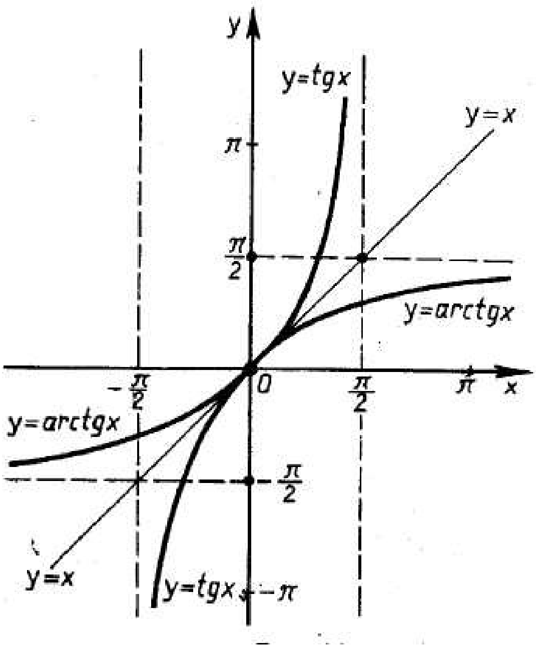


Рис. 2.21

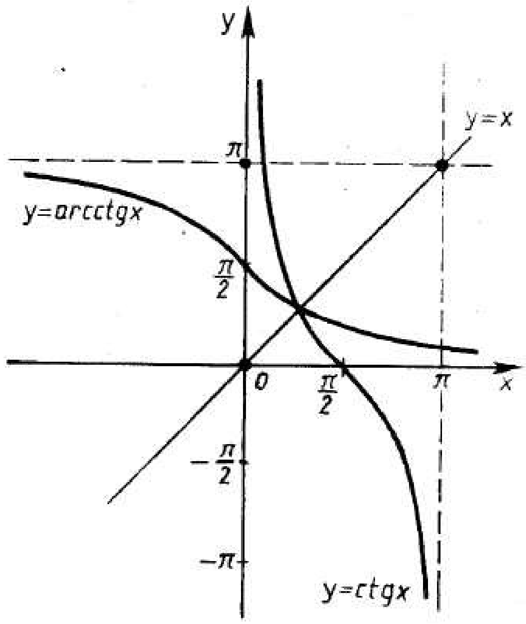


Рис. 2.22

Арккотангенс — убывающая функция. Свойствами четности либо нечетности эта функция не обладает.

Рассмотренные обратные тригонометрические функции arcsin$x$, arccos$x$, arctg$x$ и arcctg$x$ являются монотонными, непериодическими и ограниченными в своих областях определения функциями.

К простейшим элементарным функциям относят также постоянную функцию

$$y=C, x \in R,$$

множеством значений которой является единственное число C. Графиком этой функции является прямая линия, параллельная оси абсцисс и отстоящая от нее на расстоянии $|C|$. Эта прямая лежит выше оси абсцисс, если C>0, ниже оси абсцисс, если C<0, и совпадает с осью абсцисс, если C = 0. Постоянная функция является ограниченной, четной, периодической функцией, причем периодом может служить любое число $T \in R$.

Для наглядности сведем в одну таблицу рассмотренные простейшие элементарные функции (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Функции	Область определения A	Множество значений B	Ограниченность	Четность	Нечетность	Монотонность	Периодичность
I. постоянная функций 1. $y = C, C \in R$	A=R	B={C}	Да	Да	Нет	Нет	Да Т-любой
II. Степенная функция 2. $y = x^{\alpha}, \alpha \in R, \alpha \neq 0$	$A=R_{+}$	$B= R_{+}$	Нет	Нет	Нет	Да	Нет
III. Показательная функция 3. $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$.	A=R	$B= R_{+}$	Нет	Нет	Нет	Да	Нет
IV. Логарифмическая функция 4. $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$.	$A=R_{+}$	B= R	Нет	Нет	Нет	Да	Нет
V. Тригонометрические функции 5. $y=\sin x$	A=R	B=[-1; 1]	Да	Нет	Да	Нет	Да Т=2π
6. $y=\cos x$	A=R	B=[-1; 1]	Да	Да	Нет	Нет	Да Т=2π
7. $y=\mathrm{tg}\, x$	A=R $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$	B= R	Нет	Нет	Да	Нет	Да Т=π
8. $y=ctg x$	A=R $x \neq \pi k$	B= R	Нет	Нет	Да	Нет	Да Т=π
VI. Обратные тригонометрические функции 9. $y=\arcsin x$	A=[-1; 1]	$B = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	Да	Нет	Да	Да	Нет
10. $y=\arccos x$	A=[-1; 1]	B=[0;π]	Да	Нет	Нет	Да	Нет
11. $y=\mathrm{arctg}\, x$	A=R	$B = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	Да	Нет	Да	Да	Нет
12. $y=\mathrm{arcctg}\, x$	A=R	B=(0;π)	Да	Нет	Нет	Да	Нет

2.3. Сложная функция. Класс элементарных функций. Многочлены. Рациональные функции

2.3.1. Сложная функция

Пусть заданы две функции $y = g(x)$, $x \in X$, и $z = \varphi(y)$, $y \in Y$, причем область определения функции φ содержит множество значений функции g. В этом случае функция $z = \varphi(g(x))$ называется сложной функцией, составленной из функций g и φ, или суперпозицией функций g и φ. Например, функция $z = \ln\left(1 + x^3\right)$ есть сложная функция, составленная из более простых функций $y = 1 + x^3$ и $z = \ln y$. Подобным образом можно рассматривать сложные функции, являющиеся суперпозицией более чем двух функций. Например, функция $z = \sin\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)$ может быть рассмотрена как суперпозиция следующих функций: $z = \sin v$, $v = 1 + y$ и $y = \sqrt[3]{x}$.

Пример 1. Для функций $g(x) = x^2 + \sqrt[3]{x}$ и $\varphi(x) = \ln x + x^5 + 1$ составьте сложные функции $g(\varphi(x))$ и $\varphi(g(x))$.

Чтобы образовать сложную функцию $g(\varphi(x))$, положим $z = g(y)$, $y = \varphi(x)$. Тогда $z = y^2 + \sqrt[3]{y} = \left(\ln x + x^5 + 1\right)^2 + \sqrt[3]{\ln x + x^5 + 1}$. Итак, мы нашли, что

$$z = g(\varphi(x)) = \left(\ln x + x^5 + 1\right)^2 + \sqrt[3]{\ln x + x^5 + 1},$$

Аналогично, положив $z = \varphi(y)$, $y = g(x)$, находим $y = \ln x + x^5 + 1 = \ln\left(x^2 + \sqrt[3]{x}\right) + \left(x^2 + \sqrt[3]{x}\right)^5 + 1$. Таким образом,

$$y = \varphi\big(g(x)\big) = \ln\left(x^2 + \sqrt[3]{x}\right) + \left(x^2 + \sqrt[3]{x}\right)^5 + 1.$$

Как обычно, здесь считается, что полученные функции определены на естественных областях определения.

Рассмотренный пример показывает, что результат суперпозиции двух различных функций зависит от порядка, в котором эти функции следуют, т.е., вообще говоря, $\varphi(g(x)) \neq g(\varphi(x))$, если $\varphi(x) \neq g(x)$.

Рассмотрим суперпозицию взаимно обратных функций f и f^{-1}. Если A — область определения функции f, а B — множество ее значений, то имеют место равенства

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ для любого } x \in A,$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \text{ для любого } y \in B, \tag{2.3.1.1}$$

поскольку суперпозиция взаимно обратных отображений множеств является тождественным отображением.

Рассмотрим обратные тригонометрические функции arcsin x и arccos x, которые определены на отрезке [—1; 1]. На этом отрезке

$$\sin(\arcsin x) = x,$$

$$\cos(\arccos x) = x. \tag{2.3.1.2}$$

Используя формулы (2.3.1.2), находим:

$$\begin{aligned} \cos(\arcsin x) &= \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}, \\ \sin(\arccos x) &= \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1-x^2}. \end{aligned} \tag{2.3.1.3}$$

Перед корнями взяты знаки «плюс» потому, что на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (это множество значений функции arcsin x) косинус неотрицателен, а синус неотрицателен на отрезке [0; π] (это множество значений функции arccos x). Докажем равенство

$$arc\sin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \ x \in [-1;1]. \tag{2.3.1.4}$$

Для доказательства формулы (2.3.1.4) достаточно показать, что для любого $x \in$ [— 1; 1] справедливо равенство

$$\sin(\arcsin x + \arccos x) = 1.$$

Воспользуемся известным тригонометрическим равенством $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ и формулами (2.3.1.2) и (2.3.1.3). Тогда

$$\sin(\arcsin x + \arccos x) = \sin(\arcsin x)\cdot\cos(\arccos x) +$$

$$+\cos(\arcsin x)\cdot\sin(\arccos x) = x^2 + \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 = 1.$$

Аналогично доказывается равенство

$$arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2},\ x \in R. \qquad (2.3.1.5)$$

Соотношения (2.3.1.4), (2.3.1.5) между обратными тригонометрическими функциями будут широко использоваться в дальнейшем.

2.3.2. Многочлены

Многочленом степени *n* или целой рациональной функцией называется функция вида

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n,\ x \in R,\ a_0 \neq 0, \qquad (2.3.2.1)$$

где a_o, a_1, ..., a_{n-1}, a_n — произвольные фиксированные действительные числа, называемые коэффициентами многочлена, а $n \in N$. Многочлены принято обозначать заглавными буквами *P, Q,* ... и т. д., указывая в виде нижнего индекса его степень *n*. Примерами многочленов являются $P_3(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, $P_2(x) = 5x^2 - 3x + 7$, $P_1(x) = a_0x + 4$ и т. д. Многочлен нулевой степени ($n = 0$) совпадает с постоянной функцией

$$P_0(x) = a_0,\ x \in R,$$

где в отличие от формулы (2.3.2.1) константа a_o может быть равна нулю. Для многочлена общего вида (2.3.2.1) часть коэффициентов (кроме a_o) может быть равной нулю. Примерами таких неполных многочленов являются $P_3(x) = a_0x^3 + 7$, $P_2(x) = 2x^2 - 5x$ и т. д.

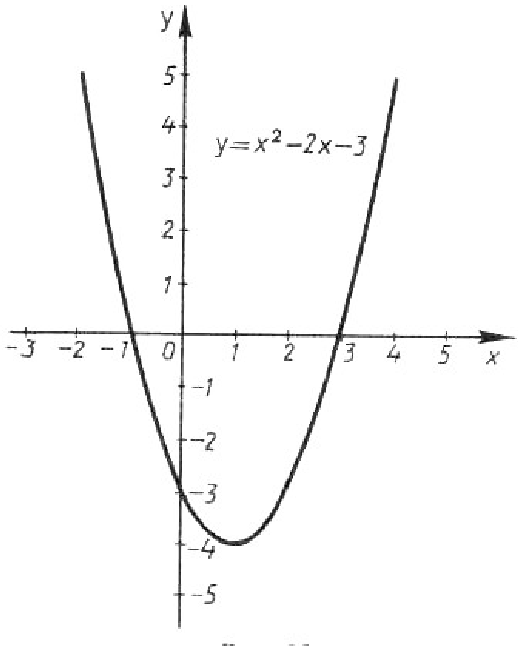


Рис. 2.23

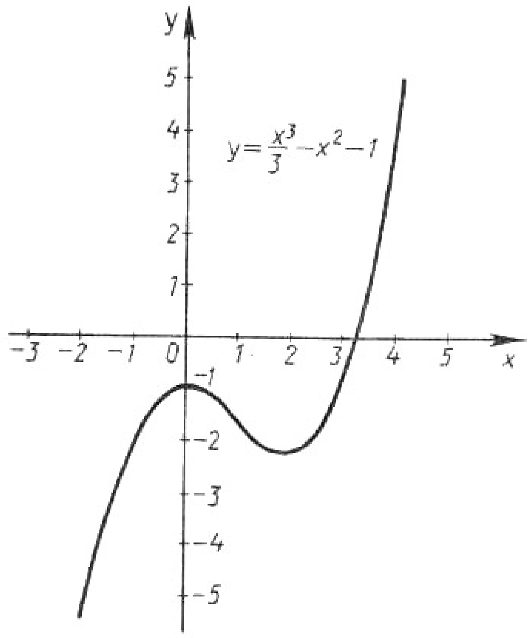


Рис. 2.24

Многочлен первой степени

$$P_1\left(x\right) = a_0 x + a_1$$

называют линейной функцией. Многочлен второй степени

$$P_2\left(x\right) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$$

принято называть квадратным трехчленом.

На рисунках 2.23 и 2.24 показаны для примера графики многочленов $y = x^2 — 2x — 3$ и $y = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 1$. Многочлены являются неограниченными и непериодическими функциями, не обладающими в общем случае свойствами четности (нечетности) и монотонности. Отдельные многочлены (например, $P_2(x)=x^2$) могут быть четными функциями, а также монотонными (например, $P_3(x)=x^3$) функциями.

2.3.3. Рациональные функции

Функция вида

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$$

называется рациональной функцией (рациональной дробью). Область определения такой функции — вся числовая ось, за исключением точек, в которых знаменатель обращается в нуль. Многочлен, очевидно, является частным случаем рациональной функции. Примерами рациональных функции являются $y = \frac{5x^3 - 2x + 3}{x^2 + x - 7}$; $y = \frac{2x-1}{x^2 - 2x - 3}$ и т. д. На рисунке 2.25 показан график рациональной функции $y = \frac{2x-1}{x^2 - 2x - 3}$.

Рациональная дробь называется правильной, если степень

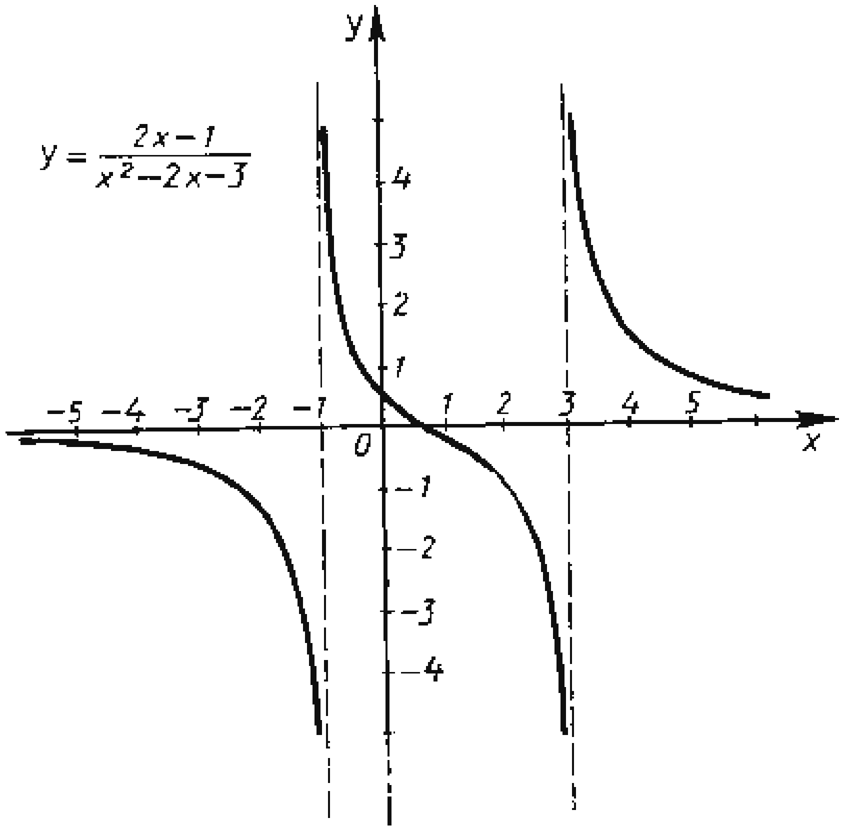


Рис. 2.25

многочлена, стоящего в числителе дроби, меньше степени многочлена, стоящего в знаменателе. В противном случае, рациональная дробь называется неправильной. Неправильную рациональную дробь всегда можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби. Для этого достаточно поделить числитель на знаменатель по правилу деления многочленов с остатком (деление «уголком»). Рассмотрим, к примеру, неправильную рациональную дробь

$$y = \frac{x^2+2}{x-1}.$$

Делим числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^2+2 & x-1 \\ \underline{x^2-x} & x+1 \\ -\,x+2 & \\ \underline{x-1} & \\ 3 & \end{array}$$

Отсюда находим, что

$$y = \frac{x^2+2}{x-1} = x+1+\frac{3}{x-1}.$$

Таким образом, неправильная рациональная дробь $\frac{x^2+2}{x-1}$ представлена в виде суммы многочлена x+1 и правильной рациональной дроби $\frac{3}{x-1}$.

Правильные рациональные функции в частном случае, когда знаменатель нигде не обращается в нуль, являются ограниченными функциями, определенными на всей числовой оси. Такой функцией является функция $y = \frac{x+1}{x^2+3}$, $x \in R$ график которой показан на рисунке 2.26.

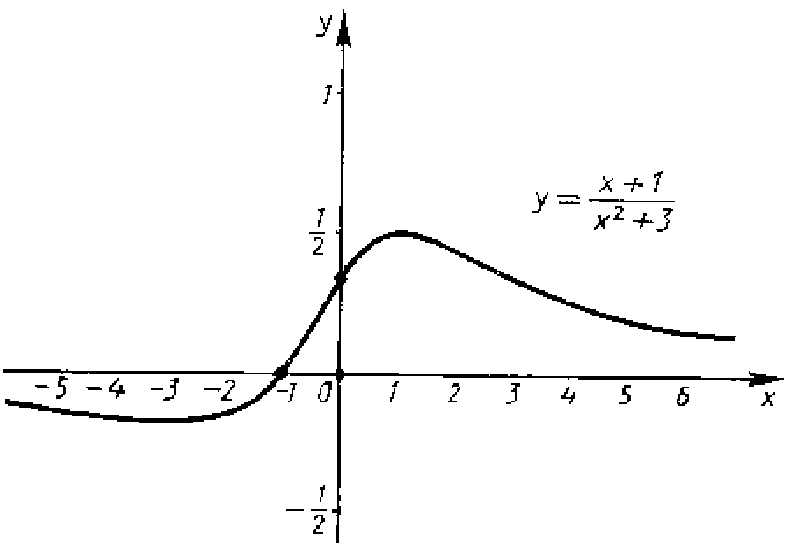


Рис. 2.26

2.3.4. Алгебраические функции. Трансцендентные функции

Если в формуле, определяющей функцию, над аргументом x производятся только алгебраические операции (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень), то такую функцию называют алгебраической. Ясно, что многочлены и рациональные функции являются алгебраическими функциями. Алгебраическую функцию называют иррациональной, если в задающую ее формулу входят радикалы. Например, функция

$$y = \frac{5x^2 - \sqrt{x}}{2x^4 + \sqrt[5]{x^2}}$$

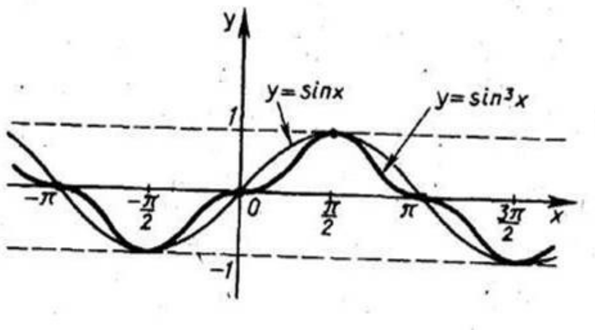
является иррациональной.

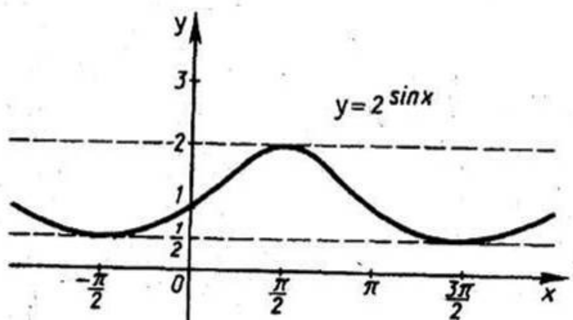
Всякую неалгебраическую функцию называют трансцендентной. Таковыми являются функции a^x, $\log_a x$, $\sin x$ и т. д.

2.3.5. Элементарные функции

В приложениях важную роль играют функции, которые получаются посредством конечного числа арифметических операций и конечного числа суперпозиций из простейших элементарных функций. Такие функции называются элементарными. Например, функции $f_1(x) = x^2+5\sin 3x$, $f_2(x) = \ln|\cos x|$, $f_3(x) = \sin(\ln x) + e^{\arcsin\sqrt{x}}$ являются элементарными функциями.

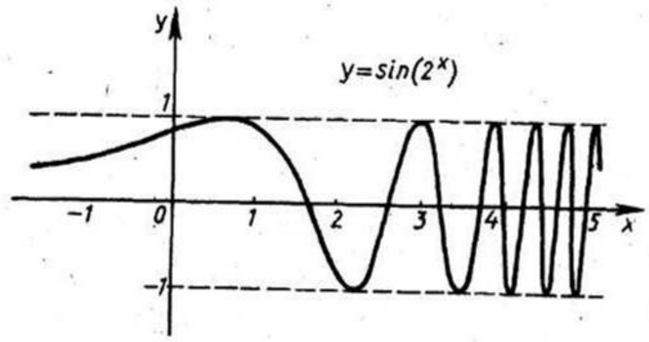
Класс элементарных функций состоит из бесконечного числа функций, обладающих самыми разнообразными свойствами. На рисунках 2.27—2.30 показаны для примера графики элементарных функций $y = \sin^3 x$, $x \in R$ (рис. 2.27), $y = 2^{\sin x}$, $x \in R$ (рис. 2.28), $y = \sin(2^x)$, $x \in R$ (рис. 2.29), и $y = \log_2(\sin x)$





элементарные функции весьма просты, поскольку они строятся на базе двенадцати перечисленных в таблице 2.1 простейших элементарных функций, свойства которых нам хорошо известны. Все это делает класс элементарных функций главным объектом изучения в курсе математического анализа.

Рис. 2.27 Рис. 2.28



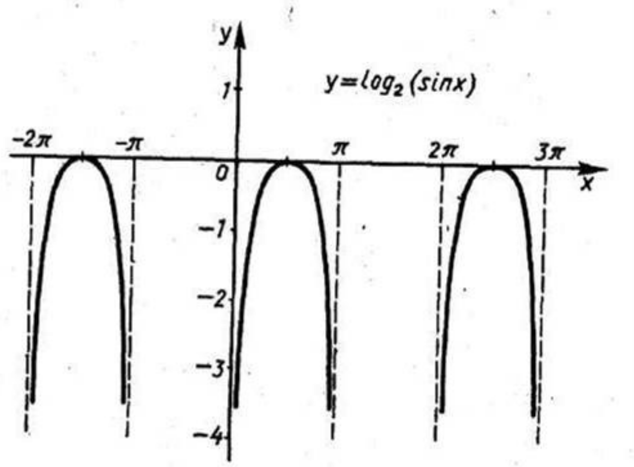


Рис. 2.29 Рис. 2.30

2.4. Последовательности

2.4.1. Числовые последовательности

Бесконечной числовой последовательностью называется числовая функция *f*, определенная на множестве всех натуральных чисел *N*. Значения такой функции обозначают a_n (или b_n, c_n, ...). Число *n* называют номером члена a_n. Последовательность обозначают

$$\{a_n\}, \text{ или } a_n,\ n \in N, \text{ или } a_1, a_2, ..., a_n ... \quad (2.4.1.1)$$

Другими словами, если каждому натуральному числу *n* сопоставлено число a_n, то говорят, что задана последовательность $\{a_n\}$. Число a_1 называется первым членом последовательности, a_2 — вторым, ..., a_n — n-м (общим) членом последовательности. Напомним основные способы задания бесконечной последовательности.

Прямым способом задания последовательности является задание функции f, порождающей последовательность:

$$a_n = f(n),\ n \in N. \tag{2.4.1.2}$$

Формула (2.4.1.2) позволяет вычислить общий член последовательности a_n через номер n, например:

$$a_n = 5^n,\ n \in N, \tag{2.4.1.3}$$

$$a_n = \frac{1+(-1)^n}{2},\ n \in N. \tag{2.4.1.4}$$

Поэтому формулу (2.4.1.2) называют формулой общего члена последовательности. По этой формуле можно вычислить любой член последовательности. Первые несколько членов последовательности часто выписывают в виде строки наряду с формулой общего члена для большей наглядности. Например, для последовательности (2.4.1.4) имеем:

$$a_1 = \frac{1+(-1)^1}{2} = \frac{1-1}{2} = 0,\ a_2 = \frac{1+(-1)^2}{2} = 1,\ a_3 = \frac{1+(-1)^3}{2} = 0.$$

и т. д. Следовательно, данная последовательность имеет вид:

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots .$$

Условимся вместо слов «рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, заданную формулой $a_n = f(n),\ n \in N$» говорить короче: «рассмотрим последовательность $a_n = f(n),\ n \in N$» или еще короче: «пусть $a_n = f(n)$».

Пример 1. Пусть $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^3}$. Вычислить первые пять членов этой последовательности.

Вычисляем по формуле общего члена последовательности:

$$a_1 = \frac{(-1)^1}{1^3} = -1,\ a_2 = \frac{(-1)^2}{2^3} = \frac{1}{8},\ a_3 = \frac{(-1)^3}{3^3} = -\frac{1}{27}$$

и т. д. Эта последовательность имеет вид:

$$-1,\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{27},\ \frac{1}{64},\ -\frac{1}{125},\ \dots .$$

Последовательность, у которой все члены принимают равные между собой значения, называется постоянной последовательностью.

Пример 2. Пусть $a_n = \cos(2\pi n)$, $n \in N$. Вычислить несколько первых членов данной последовательности.

Вычисляем по формуле общего члена последовательности: $a_1=\cos 2\pi=1$, $a_2=\cos 4\pi = 1$, $a_3 = \cos 6\pi=1$ и т. д. Данная последовательность имеет вид 1, 1, 1, 1, ..., т. е. является постоянной последовательностью.

Другим распространенным способом задания последовательности является рекуррентный способ. Этот способ задания последовательности состоит в том, что указывается правило (обычно это формула), позволяющее вычислить общий член последовательности через предыдущие члены, а также задаются несколько начальных членов последовательности. Формула, позволяющая вычислить общий член последовательности через предыдущие члены, носит название рекуррентного соотношения. Примером рекуррентного соотношения может служить формула

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}. \tag{2.4.1.5}$$

Отметим, что заданием рекуррентного соотношения последовательность полностью не определяется. Все дело в том, что первые члены последовательности нельзя вычислить по рекуррентному соотношению. Например, формула (2.4.1.5) не имеет смысла при $n = 1$ и $n = 2$, так как члены a_0 и a_{-1} с номерами 0 и —1 не существуют, поэтому значения a_1 и a_2 надо задавать дополнительно. Такие значения a_1 и a_2 для данной последовательности называются начальными. Далее, начиная с a_3, рекуррентное соотношение и начальные члены a_1 и a_2 позволят вычислить любой член рассматриваемой последовательности.

Пусть, например, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$. Тогда

$a_3 = 2a_2 - a_1 = -1$, $a_4 = 2a_3 - a_2 = -2$, $a_5 = 2a_4 - a_3 = -3$

и т. д. Таким образом, заданная рекуррентным соотношением (2.4.1.5) и начальными членами $a_1 = 1$ и $a_2 = 0$ последовательность имеет вид:

$$1, 0, —1, —2, —3, —4, —5, ...$$

Иногда последовательность задают словесно, т. е. описанием ее членов.

2.4.2. Ограниченные и монотонные последовательности

Определение 1. Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной, если существует такое положительное число M, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство

$$|a_n| \le M \; .$$

В противном случае последовательность называется неограниченной. Например, последовательности $a_n = \frac{1}{n^4}$ и $a_n = (-1)^n$ ограниченные, так как $0 < \frac{1}{n^4} \le 1$, т. е. $\left|\frac{1}{n^4}\right| \le 1$, и $-1 \le (-1)^n \le 1$, т.е. $\left|(-1)^n\right| \le 1$.

Определение 2. Последовательность $\{a_n\}$ называется возрастающей, если для любого n выполняется неравенство

$$a_{n+1} \ge a_n \; .$$

Если же $a_{n+1} > a_n$, то последовательность называется строго возрастающей.

Определение 3. Последовательность $\{a_n\}$ называется убывающей, если для любого n имеет место неравенство

$$a_{n+1} \le a_n \; .$$

Если же $a_{n+1} < a_n$, то последовательность называется строго убывающей.

Все эти последовательности называются монотонными последовательностями. Например, последовательность $\left\{\frac{1}{n^3}\right\}$ строго убывающая, так как для любого n имеем $\frac{1}{(n+1)^3} < \frac{1}{n^3}$. Последовательность $a_n = \frac{n-1}{n}$, $n \in N$, строго возрастающая, так как

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0,$$

и, следовательно, $a_{n+1} > a_n$ для любого n. Последовательность вида 1, 1, 2, 2, 3, 3, ... является возрастающей, а последовательность 1, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, ... убывающая. Очевидно, что не всякая последовательность является монотонной. Например, последовательности 1, 2, $\frac{1}{3}$, 4, $\frac{1}{5}$, 6, $\frac{1}{7}$, … и 0, 1, 0, 1, 0, 1, … не являются монотонными.

2.5. Предел последовательности

2.5.1. Предел числовой последовательности. Сходящиеся и расходящиеся числовые последовательности

Рассмотрим последовательность

$$b_n = \frac{8n-1}{n}, \; n \in N. \tag{2.5.1.1}$$

Легко видеть, что $b_n = 8 - \frac{1}{n}$, и, следовательно, b_n с возрастанием номера n приближается к 8. Поставим перед собой задачу придать этому утверждению точную математическую формулировку. С этой целью сначала ответим на следующий вопрос: каким должно быть n, чтобы модуль разности b_n—8 был меньше 0,001? Так как

$$|b_n - 8| = \frac{1}{n},$$

то неравенство $|b_n - 8| < 0,001$ выполняется для любого $n>N$ = 1000. Для произвольного положительного числа ε неравенство

$$|b_n - 8| \le \varepsilon \qquad (2.5.1.2)$$

равносильно неравенству $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Так как нас интересуют натуральные значения *n,* то находим, что неравенство (2.5.1.2) выполняется для любого $n > N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, где $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ - целая часть числа $\dfrac{1}{\varepsilon}$. В этом случае говорят, что предел последовательности (2.5.1.1) равен 8, и пишут:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n-1}{n} = 8.$$

Сформулируем теперь определение предела последовательности.

Определение 1. Пусть задана числовая последовательность $\{a_n\}$. Число *a* называется пределом этой последовательности, если для каждого заданного числа ε>0 найдется такое натуральное число *N,* что для любого номера *n*>*N* выполняется неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon .$$

В этом случае пишут:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ или } a_n \to a \text{ при } n \to \infty$$

и говорят: «Последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, равный числу *a*» или «Последовательность $\{a_n\}$ сходится к числу *a*».

Рассмотренный пример показывает, что выбор натурального числа N зависит от заданного положительного числа е. Чтобы отметить эту зависимость, пишут: $N = N(\varepsilon)$ или $N = N_\varepsilon$.

Определение 2. Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся, а не имеющая предела — расходящейся.

Рассмотрим несколько примеров на вычисление предела последовательности, используя определение предела.

Пример 1. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{3n-1} = \frac{4}{3}. \qquad (2.5.1.3)$$

По определению число $\frac{4}{3}$ будет пределом этой последовательности, если для каждого числа ε>0 найдется натуральное число $N=N(\varepsilon)$, такое, что для всех номеров $n>N$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{4n+1}{3n-1}-\frac{4}{3}\right|=\frac{7}{3(3n-1)}<\varepsilon .$$

Оно справедливо для всех $n>\frac{7+3\varepsilon}{9\varepsilon}$, т. е. для всех $n>N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon)=\left[\frac{7+3\varepsilon}{9\varepsilon}\right]$. Это и доказывает равенство (2.5.1.3).

Пример 2. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{10^n}=0. \qquad (2.5.1.4)$$

Неравенство $\left|\frac{1}{10^n}-0\right|=\frac{1}{10^n}<\varepsilon$ равносильно неравенству $n>\lg\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Таким образом, для каждого положительного ε неравенство $\left|\frac{1}{10^n}-0\right|<\varepsilon$ выполняется для всех $n>N(\varepsilon)=\left[\lg\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]$. Это и доказывает равенство (2.5.1.4).

Теорема 1. *Если последовательность имеет предел, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{a_n\}$ имеет пределом число a. Докажем, что она ограничена. Возьмем некоторое число $\varepsilon>0$. Тогда найдется номер N, такой, что вне интервала $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ могут оказаться лишь N первых членов последовательности: $a_1, a_2, \ldots, a_N$. Среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_N, a-\varepsilon, a+\varepsilon$ найдем наименьшее и наибольшее и обозначим их соответственно через m и M. Тогда $m\le a_n\le M$ для всех n, а это и означает, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена.

Теорема 2. *Всякая сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

Доказательство. Используем при доказательстве метод от противного. Предположим, что сходящаяся последовательность $\{a_n\}$ имеет два различных предела a и b. Пусть для определенности $a<b$. Положив $\varepsilon = \frac{b-a}{3} > 0$, получим:

$$a + \varepsilon < b - \varepsilon. \tag{2.5.1.5}$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то согласно определению предела для выбранного $\varepsilon = \frac{b-a}{3}$ существует такой номер N_1, что для всех $n>N_1$ будет выполняться неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ и, в частности, $a_n < a + \varepsilon$. С другой стороны, так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, то существует такой номер N_2, что для всех $n > N_2$ будет $|a_n - b| < \varepsilon$ и, в частности, $b - \varepsilon < a_n$. Положив $N = \max\{N_1, N_2\}$ (т. е. выбрав максимальное из двух чисел N_1 и N_2), получим, что $b - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ для $n>N$, но это противоречит неравенству (2.5.1.5). Следовательно, последовательность не может иметь двух различных пределов.

2.5.2. Бесконечно малые последовательности

Вычисление пределов и доказательства теорем о пределах упрощаются, если использовать понятие бесконечно малой последовательности.

Определение. Последовательность называется бесконечно малой, если ее предел равен нулю.

Например, последовательность $a_n = \frac{1}{n}$ является бесконечно малой, так как ее предел равен нулю. Последовательность $a_n = \frac{1}{10^n}$ также бесконечно малая, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$.

Теорема 1. *Сумма двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две бесконечно малые последовательности. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N_1, такой, что

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2.5.2.1)$$

для всех $n>N_1$,и найдется номер N_2, такой, что

$$|b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2.5.2.2)$$

для всех $n>N_2$. Выбрав $N = \max\{N_1,\ N_2\}$, получим, что для любого $n>N$ неравенства (2.5.2.1) и (2.5.2.2) имеют место одновременно. Следовательно, для любого $n>N$ получим:

$$|a_n + b_n| \le |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Так как $\varepsilon > 0$ было взято произвольным, то тем самым установлено, что $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$, т. е. последовательность $\{a_n + b_n\}$ бесконечно малая.

Аналогично доказывается, что сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

Теорема 2. *Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность.*

Пусть $\{b_n\}$ — ограниченная последовательность, т. е.

$$|b_n| \le M \qquad (2.5.2.3)$$

для всех n. Пусть $\{a_n\}$ - бесконечно малая последовательность. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{M+1} \qquad (2.5.2.4)$$

для всех $n > N$. Из неравенств (2.5.2.3) и (2.5.2.4) следует, что

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \le \frac{\varepsilon}{M+1} \cdot M < \varepsilon$$

для любого $n > N$. А это и означает, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0,$$

Т.е. последовательность $\{a_n b_n\}$ бесконечно малая.

Так как бесконечно малая последовательность ограничена, то из теоремы 2 следует, что произведение двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Теорема 3. Для того чтобы *a* было пределом последовательности $\{a_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы a_n могло быть предоставлено в виде $a_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность, т.е. $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$.

По условию теоремы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad (2.5.2.5)$$

для всех *n*>*N*. Пусть $\alpha_n = a_n - a$, тогда

$$|\alpha_n| < \varepsilon \qquad (2.5.2.6)$$

для всех *n*>*N,* откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Итак, если число *a* – предел последовательности $\{a_n\}$, то $a_n = a + \alpha_n$, где $\{a_n\}$ - бесконечно малая последовательность. Аналогично доказывается и обратное утверждение, так как из (2.5.2.6.) следует (2.5.2.6).

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n + \sin n}{n}$.

Обозначим $a_n = \dfrac{n + \sin n}{n}$ и $b_n = \dfrac{\sin n}{n}$. Так как $a_n = 1 + b_n$, то по теореме 3 число 1 будет пределом последовательности $\{a_n\}$, если последовательность $\{b_n\}$ бесконечно малая. По теореме 2 произведение ограниченной последовательности $\{\sin n\}$ на бесконечно малую последовательность $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$, т.е. последовательность $\{b_n\}$, есть бесконечно малая последовательность. Итак, число 1 является пределом последовательности $\{a_n\}$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + \sin n}{n} = 1.$$

2.5.3. Теоремы о пределах последовательностей, связанные с арифметическими действиями

При вычислении пределов часть приходится использовать теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного.

Теорема 1 (о пределе суммы). *Если последовательности* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ *сходятся, то их сумма* $\{a_n+b_n\}$ *также сходится и предел суммы равен сумме пределов:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n.$$

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. Тогда по теореме 3 из п. 2.5.2 имеем:

$$a_n=a+\alpha_n,\ b_n=b+\beta_n,$$

где $\alpha_n\to 0$ и $\beta_n\to 0$ при $n\to\infty$. Следовательно,

$$a_n+b_n=(a+b)+(\alpha_n+\beta_n),$$

где $(\alpha_n+\beta_n)\to 0$ при $n\to\infty$, так как сумма бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность. Тогда по тереме 3 из п. 2.5.2 имеем:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$$

Теорема 2 (о пределе произведения). *Если последовательности* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ *сходятся, то их произведение* $\{a_nb_n\}$ *сходится и предел произведения равен произведению пределов:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty}b_n\right)$$

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. Тогда по теореме 3 из п. 2.5.2

$$a_n=a+\alpha_n,\ b_n=b+\beta_n,$$

где $\alpha_n\to 0$ и $\beta_n\to 0$ при $n\to\infty$. Перемножив последние равенства, получим:

$$a_nb_n=ab+(b\alpha_n+a\beta_n+\alpha_n\beta_n).$$

Из теорем 1,2 п. 2.5.2 следует, что $\left(b\alpha_n + a\beta_n + \alpha_n\beta_n\right) \to 0$ при $n \to \infty$.

Тогда по теореме 3 из п. 2.5.2

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n b_n\right) = ab = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$$

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty}\left(ca_n\right) = c\lim_{n\to\infty} a_n.$$

По теореме 2 имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\left(ca_n\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} c\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, так как $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

Следствие 2. Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, то их разности $\{a_n - b_n\}$ сходится и предел разности равен разности пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n - b_n\right) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

По теореме 1 и следствию 1 имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n - b_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n + (-1)b_n\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)b_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Теорему о пределе частного приведем без доказательства.

Теорема 3 (о пределе частного). *Если последовательности* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ *сходятся, причем* $b_n \neq 0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, *то их частное* $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ *сходится и предел частного равен частному пределов:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Рассмотрим примеры вычисления пределов с помощью доказанных теорем.

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7-5n}{3-4n}$.

Числитель и знаменатель представляют собой расходящиеся последовательности (так как они не ограничены), поэтому нельзя непосредственно применить теорему о пределе частного. Однако, можно сначала поделить и числитель, и знаменатель на n (от этого дробь не изменится), а потом уже применить теоремы о пределе частного и разности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7-5n}{3-4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7}{n}-5}{\frac{3}{n}-4}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{n}-5\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}-4\right)}=\frac{5}{4}.$$

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\left(n^2+2n+1\right)}{1-n-n^2}$

Имеем: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\left(n^2+2n+1\right)}{1-n-n^2}=5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{1-n-n^2}=$

$$=5\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}-1}=5\cdot\frac{1}{(-1)}=-5.$$

2.5.4. Предельный переход в неравенствах

Рассмотрим последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$.

Теорема. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$ *и, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство* $x_n\le y_n$, *то* $a\le b$.

Допустим, что $a>b$. Из неравенств $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ и $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$ следует, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое натуральное число $N(\varepsilon)$, что при всех $n>N(\varepsilon)$ будут выполняться неравенства $|x_n-a|<\varepsilon$ и $|y_n-b|<\varepsilon$, т.е. $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$ и $b-\varepsilon<y_n<b+\varepsilon$. Возьмем $\varepsilon=\frac{a-b}{2}$. Тогда $x_n>a-\varepsilon=a-\frac{a-b}{2}$, т.е. $x_n>\frac{a+b}{2}$ и $y_n<b+\varepsilon=b+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}$, т.е. $y_n<\frac{a+b}{2}$. Отсюда следует, что $x_n>y_n$. Это противоречит условию $x_n\le y_n$. Следовательно, $a\le b$.

Теорема. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$ *и справедливо неравенство* $x_n\le z_n\le y_n$ *(начиная с некоторого номера), то* $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$.

(Примем без доказательства).

2.6. Предел функции

2.6.1. Предел функции при $x \to +\infty$

Пусть дана функция $y = f(x) = 2 - \frac{1}{x}$. Составим таблицу значений этой функции и построим ее график (рис. 2.31)

x	1	2	10	100	1000
y	1	1,5	1,9	1,99	1,999

Рассматривая таблицу и график, можно предположить, что с возрастанием аргумента x эта функция неограниченно приближается к числу 2, ил, как говорят, имеет при x, стремящемся к плюс бесконечности $(x \to +\infty)$, пределом число 2.

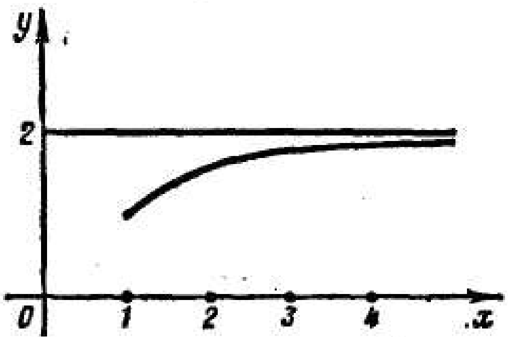


Рис. 2.31

Пусть $M(x; y)$ точка графика функции $y = 2 - \frac{1}{x}$. Найдем расстояние d от точки M до прямой $y = 2$:

$$d = |y - 2| = |f(x) - 2| = \left|\left(2 - \frac{1}{x}\right) - 2\right| = \left|\frac{1}{-x}\right| = \frac{1}{|x|}.$$

Тот факт, что при $x \to +\infty$ функция $y = 2 - \dfrac{1}{x}$ имеет пределом число 2, означает, что расстояние d от точки $M(x;\, y)$ графика функции до прямой $y = 2$, т.е. $|f(x) - 2|$, может быть сделано меньше любого наперед заданного положительного числа для достаточно больших значений x.

Так, например,

$$|f(x) - 2| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{10}, \qquad \text{если} \qquad x > 10;$$

$$|f(x) - 2| = \frac{1}{|x|} < \frac{1}{100}, \qquad \text{если} \qquad x > 100;$$

и вообще, если $\varepsilon > 0$, то

$$|f(x) - 2| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon, \qquad \text{если} \qquad x > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Дадим теперь точное определение предела функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, предполагая при этом, что функция $y = f(x)$ определена или на всей числовой оси, или для всех x, больших некоторого числа.

Число b *называется пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если каково бы ни было положительное число ε, можно найти такое число N, что для всех x, больших N, выполняется неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon. \tag{2.6.1.1}$$

Символическая запись определения предела функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ имеет следующий вид:

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0) \exists\, N \;\; \underset{x}{\forall}(x > N) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Иными словами, если функция имеет число b своим пределом (при $x \to +\infty$), то при неограниченном возрастании аргумента x значения этой функции сколь угодно мало отличаются от числа b, т.е. разность между значением функции и числом b становится сколь угодно близкой к нулю.

То, что функция имеет число b своим пределом при $x \to +\infty$, записывается следующим образом[*]: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$. Это читается так: «предел эф от *x* при *x*, стремящемся к плюс бесконечности, равен *b*». Возвращаясь к нашему примеру, имеем: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \dfrac{1}{x} \right) = 2$.

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x+3}{x} = 5$.

Решение. В данном случае $f(x) = \dfrac{5x+3}{x}$, а *b*=5. Зададим произвольное положительное число ε и рассмотрим абсолютную величину разности $f(x) - b$:

$$\left| f(x) - b \right| = \left| \frac{5x+3}{x} - 5 \right| = \left| \frac{3}{x} \right| = \frac{3}{|x|}.$$

Для того, чтобы разность была меньше ε, т.е. чтобы выполнялось неравенство

$$\left| \frac{5x+3}{x} - 5 \right| = \frac{3}{|x|} < \varepsilon, \tag{*}$$

достаточно, чтобы $|x| > 3/\varepsilon$. Так как мы рассматриваем предел функции при $x \to +\infty$, то x можно считать положительным. Поэтому неравенство (*) выполняется для всех $|x| > 3/\varepsilon$. В данном случае указанное в определении предела число *N* равно $3/\varepsilon$. Итак,

$$\underset{\varepsilon}{\forall} (\varepsilon > 0) \ \underset{\mathrm{N}}{\exists} (N = 3/\varepsilon) \Rightarrow \left| \frac{5x+3}{x} - 5 \right| < \varepsilon.$$

Это и означает, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x+3}{x} = 5$. График функции $y = \dfrac{5x+3}{x}$ для положительных значений аргумента *x* изображен на рис. 2.32.

Пример 2. Функция $y = \cos x$ не имеет предела при $x \to +\infty$. Значения этой функции при $x \to +\infty$ все время колеблются между -1 и 1.

[*] lim – первые три буквы латинского слова limes, которое в переводе на русский язык означает предел.

Из определения предела вытекает, что постоянная функция $f(x) \equiv A$ имеет при $x \to +\infty$ предел, равный A, так как неравенство $\left|f(x) - A\right| = \left|A - A\right| < \varepsilon$ при произвольном $\varepsilon > 0$ выполняется для всех x (здесь N может быть любым числом).

Рассмотренные выше примеры показывают, что функция может стремиться к пределу (если он существует), оставаясь все время меньше его, как, например, функция $y = 2 - \dfrac{1}{x}$ (см. рис. 2.31), или больше его, как функция $y = \dfrac{5x+3}{x}$ (см. рис. 2.32).

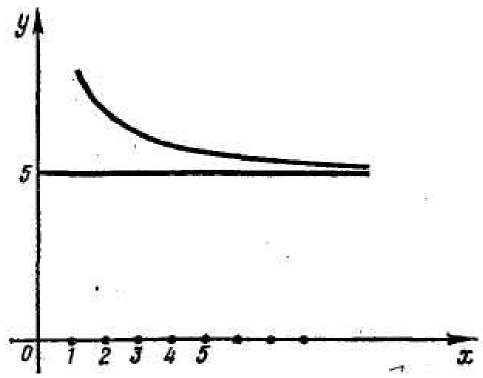


Рис. 2.32

Установим г е о м е т р и ч е с к и й с м ы с л предела функции при $x \to +\infty$. Как мы знаем, если функция $y = f(x)$ имеем пределом число b, то это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число N, что для всех $x > N$ выполняется неравенство $\left|f(x) - b\right| < \varepsilon$. На основании свойств абсолютных величин это неравенство равносильно следующим неравенствам:

$$-\varepsilon < f(x) - b < \varepsilon, \qquad (2.6.1.2)$$

или [*]

$$b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon. \qquad (2.6.1.2')$$

Неравенства (2.6.2.1’) показывают, что ординаты всех точек графика функции $y=f(x)$, абсциссы которых превосходят число *N*, заключены между числами $b-\varepsilon$ и $b+\varepsilon$. Это значит, что график функции $y=f(x)$ для всех *x*, превосходящих число *N*, содержится в полосе, ограниченной прямыми $y=b-\varepsilon$ и $y=b+\varepsilon$ (рис. 2.34а). Число *N*, фигурирующее в определении предела, вообще говоря, зависит от ε. Чем меньше ε, т.е. чем у́же полоса между прямыми $y=b-\varepsilon$ и $y=b+\varepsilon$, тем бо́льшим будет *N*.

2.6.2. Предел функции при $x\to-\infty$

Теперь рассмотрим определение предела функции при *x*, стремящемся к минус бесконечности ($x\to-\infty$).

Число b называется пределом функции $y=f(x)$ при $x\to-\infty$, если каково бы ни было положительное число ε, можно найти такое число M, что для всех x, меньших M, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Символическая запись определения предела функции $f(x)$ при $x\to-\infty$:

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon>0)\ \exists M\ \ \underset{x}{\forall}(x<M)\Rightarrow|f(x)-b|<\varepsilon.$$

Если функция $f(x)$ имеет пределом число *b* при $x\to-\infty$, то это записывают так: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$.

Г е о м е т р и ч е с к и й с м ы с л предела функции при $x\to-\infty$ аналогичен геометрическому смыслу предела при $x\to+\infty$. Если $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$, то каково бы

---

[*] Так как неравенство $|z|<\varepsilon$ равносильно неравенствам $-\varepsilon<z<\varepsilon$, то, полагая $z=f(x)-b$, придем к неравенствам

ни было положительное число $\varepsilon > 0$, найдется такое число *M*, что при всех $x < M$ график функции $y = f(x)$ находится в полосе, ограниченной прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$ (рис. 2.34б).

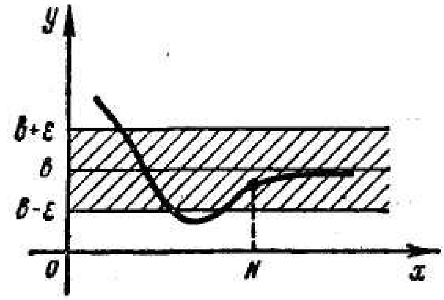


Рис. 2.34, а

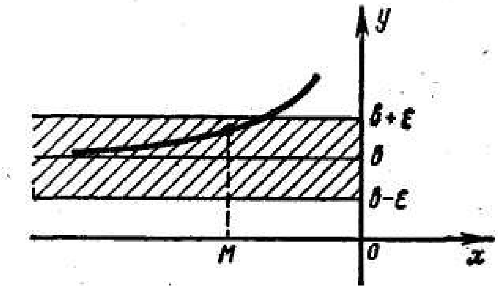


Рис. 2.34, б

2.6.3. Предел функции при $x \to x_0$

Мы ввели понятия предела функции при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$. Введем теперь понятие предела при $x \to x_0$. Рассмотрим сперва случай, когда независимая переменная *x* приближается к x_0 слева.

Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ слева, если каково бы ни было положительное число ε, найдется такое число N (меньшее x_0), что для всех x, лежащих между N и x_0 $(N < x < x_0)$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Символическая запись определения предела функции $f(x)$ при $x \to x_0$ слева:

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0)\ \underset{N}{\exists}(N < x_0)\underset{x}{\forall}(N < x < x_0) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon .$$

Понятие предела функции при $x \to x_0$ слева сходно с понятием предела функции при $x \to +\infty$ и отличается от него лишь тем, что в случае предела функции при $x \to +\infty$ неравенство (2.6.1.1) выполняется для всех *x*, превосходящих *N*, а в случае предела функции при $x \to x_0$ слева – для всех *x*, превосходящих *N*, но меньших, чем x_0. Предел функции при $x \to x_0$ слева обозначают так: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = b$. Символ $x \to x_0 - 0$ означает, что *x* стремится к x_0 слева.

Геометрический смысл предела функции при $x \to x_0 - 0$ заключается в следующем: каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое число $N(N < x_0)$, что для всех *x*, заключенных между *N* и x_0, график функции лежит в полосе, ограниченной прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$ (рис. 2.35, а)

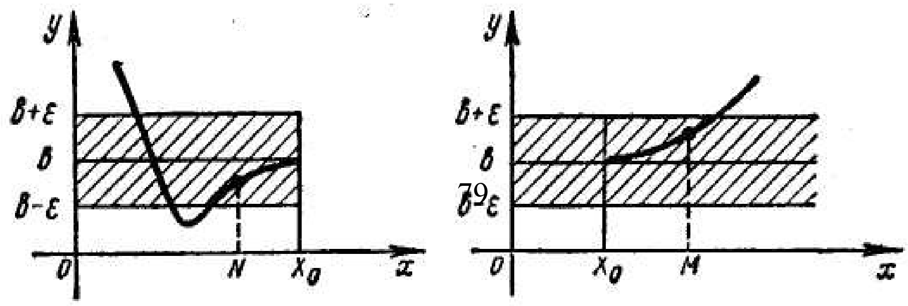
Аналогично предел функции при $x \to x_0$ слева вводится понятие предела при $x \to x_0$ справа.

Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$ *справа, если каково бы ни было положительное число* ε*, найдется такое число* M *(большее* x_0*), что для всех* x*, лежащих между* x_0 *и* M $(x_0 < x < M)$*, выполняется неравенство* $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Символическая запись определения предела функции $f(x)$ при $x \to x_0$ справа:

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0)\ \underset{N}{\exists}(M > x_0)\underset{x}{\forall}(x_0 < x < M) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Предел функции при $x \to x_0$ справа обозначают так: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b$. Если функция $y = f(x)$ при $x \to x_0$ справа имеет пределом число *b*, то геометрически это означает, что график функции лежит в полосе,



ограниченной прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$ для всех *x*, заключенных между x_0 и *M* (рис. 2.35 б).

Рис. 2.35, а   Рис. 2.35, б

Пределы функции при $x \to x_0$ слева $(x \to x_0 - 0)$ и при $x \to x_0$ справа называются *односторонними* пределами.

Если оба односторонних предела существуют и равны между собой, то говорят, что функция $f(x)$ имеет *двусторонний предел* при $x \to x_0$, или просто предел при $x \to x_0$.

Таким образом, *число b является пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to x_0$, *если каково бы ни было* $\varepsilon > 0$, *можно найти такие числа M и* $N(N < x_0 < M)$, *что для всех x, лежащих в интервале* (N, M) *(за исключением, быть может, точки* x_0*), выполняется неравенство* $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Символическая запись определения предела функции $f(x)$ при $x \to x_0$: $\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0)\underset{M,N}{\exists}(N < x_0 < M)\underset{x}{\forall}(x \in (N, M))$ (за исключением, быть может, точки x_0) $\Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Назовем *окрестностью* точки x_0 любой интервал, содержащий эту точку. Легко видеть, что если *b* есть предел функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, то неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ выполняется для всех точек некоторой окрестности точки x_0 (за исключением, быть может, точки x_0).

Если при $x \to x_0$ функция $f(x)$ имеет предел, равный *b*, то это записывают так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$. Геометрический смысл предела при $x \to x_0$ ясен из рис. 2.36.

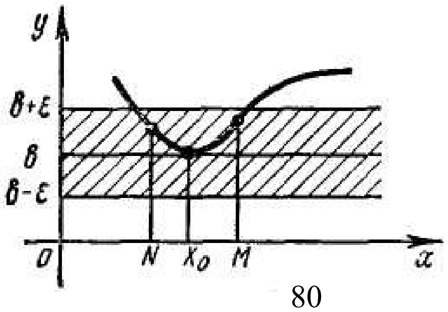


Рис. 2.36

Замечание 1. В определении предела при $x \to x_0$ (или $x \to x_0 + 0$, или $x \to x_0 - 0$) рассматривались значения $x \neq x_0$. В самой точке x_0 функция может быть и не определена. В дальнейшем это замечание будет неоднократно использовано.

Замечание 2. Числа M и N, фигурирующие в определениях предела при $x \to x_0$ (или $x \to x_0 - 0$, или $x \to x_0 + 0$), зависят от ε и x_0.

Пример1. Рассмотрим функцию $y = 2x + 1$. Ее значение при $x = 4$ равно 9. покажем, что при приближении независимой переменной x слева и справа к числу 4 значения функции неограниченно приближаются к числу 9, т.е. что $\lim\limits_{x\to 4}(2x+1) = 9$.

Для этого возьмем произвольное положительной число ε и убедимся в том, что для значений x, близких к $x_0 = 4$, разность между функцией и числом 9 по абсолютной величине может быть сделана меньше ε, т.е. что $\left|(2x+1) - 9\right| < \varepsilon$. Очевидно,

$$\left\{\left|2x+1\right| - 9 < \varepsilon\right\} \Leftrightarrow \left\{-\varepsilon < (2x+1) - 9 < \varepsilon\right\} \Leftrightarrow \left\{4 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 4 + \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Итак, разность между функцией и числом 9 становится (по абсолютной величине) меньше ε для всех x, лежащих между числами $N = 4 - \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $M = 4 + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Поэтому функция $y = 2x + 1$ имеет предел $\lim\limits_{x\to 4}(2x+1) = 9$.

Пример 2. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на сегменте $[0,\ 4]$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ если } 0 \le x < 3, \\ 3 - x, \text{ если } 3 \le x \le 4. \end{cases}$$

График этой функции приведен на рис. 2.37. Очевидно, $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 3-0}(x-1) = 2$, $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 3+0}(3-x) = 0$, что наглядно видно из графика. Здесь предел справа и предел слева не равны друг другу. Поэтому функция $y = f(x)$ не имеет предела (двустороннего) при $x \to 3$.

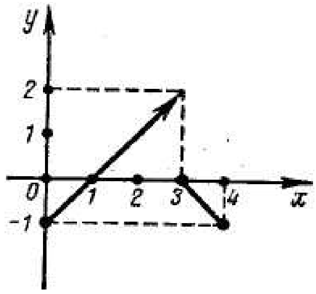


Рис. 2.37

Покажем теперь, что если функция имеет предел, то он единственный. Это легко установить геометрически. В самом деле, допустим противное, т.е. что функция $y = f(x)$, например, при $x \to +\infty$, имеет два предела b_1 и b_2. Рассмотрим две полосы, одна из которых ограничена прямыми $y = b_1 - \varepsilon$, $y = b_1 + \varepsilon$, а другая – прямыми $y = b_2 - \varepsilon$, $y = b_2 + \varepsilon$. При этом ε возьмем столь малым, чтобы обе полосы не имели общих точек. Тогда при достаточно больших x график функции не может находиться одновременно в каждой из этих полос. Таким образом, всякая функция либо совсем не имеет предела, либо имеет только один предел.

2.6.4. Бесконечно малые функции. Ограниченные функции

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to +\infty$, если ее предел при $x \to +\infty$ равен нулю. Аналогично определяются бесконечно малые функции при $x \to -\infty$, $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0 + 0$, $x \to x_0$. Так как для бесконечно малой функции предел $b = 0$, а $|f(x) - b| = |f(x) - 0| = |f(x)|$, то на основании понятия предела, например при $x \to +\infty$, можно дать следующее определение бесконечно малой функции, равносильное только данному.

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой* (при $x \to +\infty$), если каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно найти такое число *N*, что при всех $x > N$ выполняется неравенство*

$$\left| f(x) \right| < \varepsilon . \tag{2.6.4.1}$$

Символическая запись определения бесконечно малой при $x \to +\infty$:

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0)\exists N \underset{x}{\forall}(x > N) \Rightarrow \left| f(x) \right| < \varepsilon .$$

Пример 1. Покажем, что функция $y = 1/x^2$ является бесконечно малой при $x \to +\infty$. Для этого надо показать, что при $x \to +\infty$ ее предел $b = 0$, т.е. что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое *N*, что для $x > N$ выполняется неравенство (2.6.4.1):

$$\left| f(x) \right| = \left| \frac{1}{x^2} \right| = \frac{1}{x^2} < \varepsilon .$$

Но это неравенство осуществляется при $x > 1/\sqrt{\varepsilon} = N$.

Вообще, можно показать, что функция $y = 1/x^\alpha$ (где α - любое положительное число) есть бесконечно малая при $x \to +\infty$.

Пример 2. Покажем, что функция $y = x^3$ является бесконечно малой при $x \to 0$. Зададим $\varepsilon > 0$. Неравенство $\left| f(x) \right| = \left| x^3 \right| < \varepsilon$, очевидно, выполняется для всех тех значений аргумента *x*, для которых $|x| < \sqrt[3]{\varepsilon}$, $-\sqrt[3]{\varepsilon} < x < \sqrt[3]{\varepsilon}$. Таким образом, неравенство $\left| x^3 \right| < \varepsilon$ выполняется для всех *x*, лежащих между $N = -\sqrt[3]{\varepsilon}$ и $M = \sqrt[3]{\varepsilon}$. Это значит, что $\lim\limits_{x \to 0} x^3 = 0$, т.е. функция $y = x^3$ бесконечно малая при $x \to 0$.

Вообще, можно показать, что функция $y = x^m$ (где $m > 0$) бесконечно малая при $x \to 0$.

Докажем теперь несколько теорем о бесконечно малых функциях. Для определенности все формулировки и доказательства теорем будем проводить

---

* Рекомендуем сформулировать второе определение бесконечно малой функции для случаев $x \to -\infty$, $x \to x_0$, $x \to x_0 - 0$ и $x \to x_0 + 0$.

для случая бесконечно малых функций при $x \to +\infty$, так как для всех остальных случаев формулировки и доказательства аналогичны. Рекомендуем самостоятельно сформулировать и доказать эти теоремы для $x \to -\infty$, $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0$ и $x \to x_0 + 0$.

Теорема 1. *Если функция* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *являются бесконечно малыми функциями (при* $x \to +\infty$*),* то и их сумма $\varphi(x)$ + $\psi(x)$ *также является бесконечно малой функцией (при* $x \to +\infty$*).*

Доказательство. Пусть $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$. Требуется доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, т.е. установить, что

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0)\exists N \underset{x}{\forall}(x > N) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

Итак, пусть ε - любое положительное число. Так как $\varphi(x)$ по условию является бесконечно малой функцией, то для положительного числа $\varepsilon/2$

$$\exists N_1 \underset{x}{\forall}(x > N_1) \Rightarrow |\varphi(x)| < \varepsilon/2. \qquad (2.6.4.2)$$

Аналогично, для того же числа $\varepsilon/2$

$$\exists N_2 \underset{x}{\forall}(x > N_2) \Rightarrow |\psi(x)| < \varepsilon/2. \qquad (2.6.4.3)$$

Пусть N – наибольшее из чисел N_1 и N_2. Тогда для $x > N$ выполняются одновременной оба неравенства (2.6.4.2) и (2.6.4.3). Но в таком случае*

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(x > N) \Rightarrow \left\{|f(x)| = |\varphi(x) + \psi(x)| \le |\varphi(x)| + |\psi(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\right\}.$$

Следовательно, $\underset{x}{\forall}(x > N) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$, а это значит, что функция $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \to +\infty$.

Эта теорема может быть легко обобщена на любое конечное число бесконечно малых функций. Кратко ее читают так: *сумма нескольких бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.*

---

* Здесь мы используем следующее свойство абсолютных величин: $|a + b| \le |a| + |b|$.

Пример 3. Функция $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$ является бесконечно малой функцией при $x\to+\infty$, так как каждое слагаемое $1/\sqrt{x}$, $1/x$ и $1/x^2$ есть бесконечно малая функция при $x\to+\infty$ (см. пример 1).

Прежде чем переходить к дальнейшим теоремам о бесконечно малых функциях, введем понятие ограниченной функции.

Функция $y=f(x)$ называется *ограниченной* на некотором множестве M значений аргумента *x*, если существует такое положительное число *C*, что для всех $x\in M$ выполняется неравенство $|f(x)|\le C$. Таким множеством может быть, например, интервал, сегмент или даже вся числовая прямая.

Пример 4. Функция $y=\sin x$ и $y=\cos x$ ограничены на всей числовой прямой, так как для любого значения *x* имеем $|\sin x|\le 1$, $|\cos x|\le 1$.

Пример 5. Функция $y=1/x$ не является ограниченной на интервале $(0,\ 1)$, так как нельзя указать такое число *C*, чтобы для всех $x\in(0,\ 1)$ выполнялось неравенство $|1/x|\le C$.

Следующие две теоремы устанавливают связь между понятиями ограниченной функции и функции, имеющей предел. Для определенности рассмотрим случай предела функции при $x\to+\infty$.

Теорема 2. *Если функция* $y=f(x)$ *имеет предел при* $x\to+\infty$, *то она ограничена на некотором бесконечном интервале* $(N,\ +\infty)$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$. Тогда, на основании определения предела, для $\varepsilon=1$ $\exists N\,\forall_x(x>N)\Rightarrow\{|f(x)|-b<1\}$. Так как по свойству абсолютных величин $|f(x)|-b\ge|f(x)|-|b|$, то* $|f(x)|-|b|<1$, откуда $|f(x)|<|b|+1=C$. Это и означает, что функция $y=f(x)$ ограничена на бесконечном интервале $(N,\ +\infty)$.

---

* Здесь мы использовали свойство абсолютных величин $|a-b|\ge|a|-|b|$.

Замечание. Функцию, ограниченную на бесконечном интервале $]N,\ +\infty[$, будем называть ограниченной при $x \to +\infty$.

Следствие. *Бесконечно малая функция (при $x \to +\infty$) ограничена (при $x \to +\infty$).*

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 3. *Если функция $y = f(x)$ имеет предел, отличный от нуля (при $x \to +\infty$), то функция $y = 1/f(x)$ ограничена (на некотором бесконечном интервале).*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ (где $b \neq 0$) и пусть задано положительное число $\varepsilon < |b|$. На основании определения предела $\exists N \underset{x}{\forall}(x > N) \Rightarrow |f(x)| - b < \varepsilon$. Так как $|f(x) - b| = |b - f(x)| \geq |b| - |f(x)|$, то $|b| - |f(x)| < \varepsilon$ и $|f(x)| > |b| - \varepsilon > 0$. Следовательно,

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{|b| - \varepsilon} = C.$$

Таким образом, теорема доказана.

Теорема 4. *Произведение бесконечно малой функции (при $x \to +\infty$) на функцию ограниченную (при $x \to +\infty$) является функцией бесконечно малой.*

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ - ограниченная функция на бесконечном интервале $N_0 < x < +\infty$. Следовательно,

$$\underset{C}{\exists}(C > 0)\underset{x}{\forall}(x > N_0) \Rightarrow |\varphi(x)| \leq C. \qquad (2.6.4.4)$$

Пусть, далее, $f(x)$ - бесконечно малая функция при $x \to +\infty$. Покажем, что произведение $\varphi(x) \cdot f(x)$ есть бесконечно малая функция при $x \to +\infty$. В самом деле, так как $f(x)$ - бесконечно малая функция, то

$$\underset{x}{\forall}(\varepsilon > 0)\exists N_1 \underset{x}{\forall}(x > N_1) \Rightarrow |f(x)| < \frac{\varepsilon}{C}. \qquad (2.6.4.5)$$

Пусть N – наибольшее из чисел N_0 и N_1. Тогда для $x > N$ одновременно выполняются неравенства (2.6.4.4) и (2.6.4.5). Следовательно, для всех $x > N$

$$\left|\varphi(x)\cdot f(x)\right|=\left|\varphi(x)\right|\cdot\left|f(x)\right|<C\cdot\frac{\varepsilon}{C}=\varepsilon,$$

т.е. $\varphi(x)\cdot f(x)$ - бесконечно малая функция.

Пример 6. Функция $y=\dfrac{\sin x}{x^2}$ является бесконечно малой при $x\to+\infty$, так как она является произведением ограниченной функции $\sin x$ на бесконечно малую (при $x\to+\infty$) функцию $y=1/x^2$.

Пример 7. Функция $y=x^2\left(1+\sin x\right)$ является бесконечно малой при $x\to 0$, так как она является произведением ограниченной функции $\left(1+\sin x\right)$ на функцию x^2, бесконечно малую при $x\to 0$.

Следствие 1. Так как всякая бесконечно малая функция ограничена, то из только что доказанной теоремы вытекает, что *произведение двух бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.*

Следствие 2. *Произведение бесконечно малой функции на число есть функция бесконечно малая.*

Теорема 5. *Частное от деления функции $f(x)$, бесконечно малой при $x\to+\infty$, на функцию $\varphi(x)$, предел которой (при $x\to+\infty$) отличен от нуля, является функцией бесконечно малой.*

Доказательство. Функция $f(x)/\varphi(x)$ может быть представлена в виде произведения бесконечно малой функции $f(x)$ на ограниченную функцию $1/\varphi(x)$ (ограниченность функции $1/\varphi(x)$ следует из теоремы 3). Но тогда из теоремы 4 вытекает, что частное $f(x)/\varphi(x)=f(x)\cdot 1/\varphi(x)$ является бесконечно малой функцией.

2.6.5. Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми функциями

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to +\infty$, если для любого положительного числа L можно подобрать такое число N, что для всех значений $x > N$ выполняется неравенство* $|f(x)| > L$.

Так, например, функция $y = x^2$ является бесконечно большой при $x \to +\infty$. Какое бы положительной число L мы ни взяли, эта функция может быть сделана больше, чем L (для всех значений x, превосходящих число $N = \sqrt{L}$. Аналогично, функция $y = \lg x$ является бесконечно большой функцией при $x \to +\infty$, так как неравенство $|\lg| > L$ выполняется для всех x, превосходящих $N = 10^L$. Ясно, что всякая бесконечно большая функция при $x \to +\infty$ не является ограниченной, а поэтому она не имеет предела.

О бесконечно большой функции (при $x \to +\infty$) говорят, что она стремится к бесконечности, или что она имеет бесконечный предел. Если функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \to +\infty$, то это символически записываю так: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$. Это равенство не следует понимать в том смысле, что функция имеет предел; оно означает только, что функция (не имея предела) является бесконечно большой.

Если бесконечно большая функция $f(x)$ положительна (для всех достаточно больших значений x), то говорят, что она стремится к $+\infty$, и записывают это так: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Если же бесконечно большая функция отрицательна (для всех достаточно больших x), то говорят, что она стремится к $-\infty$, и пишут $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Так, например, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, а $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x^3\right) = -\infty$. Можно доказать, что *любой многочлен есть бесконечно большая функция как при* $x \to +\infty$, *так и при* $x \to -\infty$.

Между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями существует тесная связь, которая устанавливается в следующих теоремах.

---

* Число N зависит от L.

Теорема 1. *Если функция* $f(x)$ *является бесконечно большой при* $x \to +\infty$, то функция $1/f(x)$ - *бесконечно малая при* $x \to +\infty$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Покажем, что для достаточно больших *x* выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$, а это и означает, что $1/f(x)$ - бесконечно малая функция. Так как по условию $f(x)$ - бесконечно большая функция, то существует такое число *N*, что $|1/f(x)| > 1/\varepsilon$ при $x > N$. Но тогда $|1/f(x)| < \varepsilon$ для тех же *x*. Тем самым теорема доказана.

Пример 1. Функция $y = x^2$ бесконечно большая при $x \to +\infty$. Следовательно, функция $1/x^2$ является бесконечно малой при $x \to +\infty$.

Теорема 2. *Если функция* $f(x)$*, не обращающаяся в нуль, есть бесконечно малая при* $x \to +\infty$*, то* $1/f(x)$ *- бесконечно большая функция при* $x \to +\infty$. (Доказывается аналогично теореме 1).

Аналогично определяются бесконечно большие функции при $x \to -\infty$, $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0 + 0$ и $x \to x_0$. Так, например, функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0 - 0$ (при $x \to x_0$ слева), если

$$\underset{L}{\forall}(L > 0)\underset{N}{\exists}(N < x_0)\underset{x}{\forall}\left(x \in \left]N,\ x_0\right[\right) \Rightarrow |f(x)| > L\,.$$

Все сказанное в этом пункте о функциях, бесконечно больших при $x \to +\infty$, справедливо и для бесконечно больших при $x \to -\infty$, $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0 + 0$ и $x \to x_0$.

Пример 2. Функция $y = 1/x^3$ на основании теоремы 2 есть бесконечно большая функция при $x \to 0$. При этом $\lim\limits_{x \to 0-0}\left(1/x^3\right) = -\infty$, а $\lim\limits_{x \to 0+0}\left(1/x^3\right) = +\infty$, так как функция $1/x^3$ для $x < 0$ отрицательна, а для $x > 0$ положительна.

2.6.6. Основные теоремы о пределах

В этом пункте мы приведем некоторые теоремы о правилах предельного перехода, которые, как мы видим в дальнейшем, облегчает нахождение пределов. При этом, заметим, что как формулировки, так и доказательства этих теорем для случаев $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0$, $x \to x_0 + 0$ совершенно аналогичны. Поэтому, для определенности, мы приведем их только для случая $x \to +\infty$.

Прежде всего, установим связь между функцией, имеющей предел, и бесконечно малой функцией. Эта связь отражена в содержании следующих двух теорем.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ имеет предел (при $x \to +\infty$), равный b, то ее можно представить как сумму числа b и бесконечно малой функции (при $x \to +\infty$).*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$. Рассмотрим разность

$$f(x) - b = \alpha(x) \tag{2.6.6.1}$$

и покажем, что $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция (при $x \to +\infty$). Так как $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, то $\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0)\exists N \underset{x}{\forall}(x > N) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. Но тогда и $|\alpha(x)| < \varepsilon$ для $x > N$. Это значит, что $\alpha(x)$ бесконечно малая функция. Из равенства (2.6.6.1) находим $f(x) = b + \alpha(x)$. Таки образом, теорема доказана.

Теорема 2 (обратная)**.** *Если функцию $f(x)$ можно представить как сумму числа b и некоторой бесконечно малой функции (при $x \to +\infty$), то число b является пределом функции $f(x)$ (при $x \to +\infty$).*

Доказательство. По условию $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция (при $x \to +\infty$). Покажем, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$. Действительно, $f(x) - b = \alpha(x)$. Так как $\alpha(x)$ бесконечно малая функция, то $\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0)\exists N \underset{x}{\forall}(x > N) \Rightarrow \{\alpha(x) < \varepsilon\}$. Но так как $|f(x) - b| = |\alpha(x)|$, то при $x > N$

имеем $\left|f(x)-b\right|<\varepsilon$. Это и означает, на основании определения предела, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$.

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=5$.

Решение. Так как функции $6/x$ и $1/x^2$ бесконечно малые при $x\to+\infty$, $\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}$, как сумма бесконечно малых функций, есть функция бесконечно малая. Функция $5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}$ есть сумма числа 5 и бесконечно малой функции. Следовательно, по теореме 2

$$\lim_{x\to+\infty}\left(5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=5.$$

Перейдем теперь к выводу правил предельного перехода.

Теорема 3. *Если* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=c$, *то функции* $f(x)+\varphi(x)$ *и* $f(x)-\varphi(x)$ *тоже имеют пределы при* $x\to+\infty$, *причем*

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\pm\varphi(x)\right]=\lim_{x\to+\infty} f(x)\pm\lim_{x\to+\infty}\varphi(x),$$

т.е. предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов.

Доказательство. На основании теоремы 1 функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ можно представить в виде $f(x)=b+\alpha(x)$ и $\varphi(x)=c+\beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - функции бесконечно малые при $x\to+\infty$. Но тогда

$$f(x)+\varphi(x)=\left[b+\alpha(x)\right]+\left[c+\beta(x)\right]=(b+c)+\left[\alpha(x)+\beta(x)\right]. \qquad (2.6.6.2)$$

На основании теоремы 1, п. 2.6.4, сумма $\alpha(x)+\beta(x)$ является бесконечно малой функцией. Равенство (2.6.6.2) показывает, что функция $f(x)+\varphi(x)$ представлена как сумма числа $b+c$ и бесконечно малой функции $\alpha(x)+\beta(x)$. Следовательно, на основании теоремы 2 число $b+c$ является пределом функции $f(x)+\varphi(x)$. Итак,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)+\varphi(x)\right]=b+c=\lim_{x\to+\infty}f(x)+\lim_{x\to+\infty}\varphi(x).$$

В случае разности функций доказательство аналогично.

Замечание. Теорема 3 справедлива для алгебраической суммы любого конечного числа функций.

Теорема 4. *Если* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=c$, *то функция* $f(x)\varphi(x)$ *имеет предел при* $x\to+\infty$, *причем*

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\varphi(x)\right]=\lim_{x\to+\infty}f(x)\cdot\lim_{x\to+\infty}\varphi(x),$$

т.е. предел произведения двух функций равен произведению их пределов.

Доказательство. На основании теоремы 1 имеем

$$f(x)=b+\alpha(x),\ \varphi(x)=c+\beta(x),$$

где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - функции, бесконечно малые при $x\to+\infty$. Следовательно,

$$f(x)\varphi(x)=\left[b+\alpha(x)\right]\left[c+\beta(x)\right]=bc+\left[c\alpha(x)+b\beta(x)+\alpha(x)\beta(x)\right]. \qquad (2.6.6.3)$$

Функция $c\alpha(x)+b\beta(x)+\alpha(x)\beta(x)$ является бесконечно малой, как сумма трех бесконечно малых функций $c\alpha(x)$, $b\beta(x)$ и $\alpha(x)\beta(x)$ (см. п. 2.6.4, следствия из теоремы 4). Равенство (2.6.6.3) показывает, что функция $f(x)\varphi(x)$ представлена как сумма числа bc и бесконечно малой функции $c\alpha(x)+b\beta(x)+\alpha(x)\beta(x)$. Следовательно, на основании теоремы 2, число bc является пределом функции $f(x)\varphi(x)$. Итак,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\varphi(x)\right]=bc=\lim_{x\to+\infty}f(x)\cdot\lim_{x\to+\infty}\varphi(x).$$

Следствие. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т.е.*

$$\lim_{x\to+\infty}\left[k\cdot\varphi(x)\right]=k\lim_{x\to+\infty}\varphi(x),$$

где k – постоянный множитель.

Доказательство. В самом деле,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[k\cdot\varphi(x)\right]=\lim_{x\to+\infty}k\cdot\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=k\cdot\lim_{x\to+\infty}\varphi(x),$$

так как $\lim\limits_{x\to+\infty}k=k$.

Теорема 4 справедлива для любого конечного числа сомножителей, в частности, если эти сомножители равны между собой, то имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{\left[f(x)\right]^n\right\}=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\cdot f(x)...f(x)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}f(x)\cdot\lim_{x\to+\infty}f(x)...\lim_{x\to+\infty}f(x)=\left[\lim_{x\to+\infty}f(x)\right]^n.$$

Это кратко формулируют так: *предел степени равен степени предела.*

Теорема 5. *Если* $\lim_{x\to+\infty}f(x)=b$, $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=c$ и $c\neq0$, то $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ *имеет предел при* $x\to+\infty$, *причем* $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)}$, *т.е. предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю.*

Доказательство. По теореме 1 имеем $f(x)=b+\alpha(x)$, $\varphi(x)=c+\beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - бесконечно малые функции при $x\to+\infty$.

Рассмотрим разность

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}-\frac{b}{c}=\frac{b+\alpha(x)}{c+\beta x}-\frac{b}{c}=\frac{c\alpha(x)-b\beta(x)}{c^2+c\beta(x)}=\gamma(x),$$

$\gamma(x)$ - бесконечно малая функция при $x\to+\infty$. Тогда $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{b}{c}+\gamma(x)$. Поэтому, на основании теоремы 2, $f(x)/\varphi(x)$ имеет при $x\to+\infty$ предел, равный b/c:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{b}{c}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)}.$$

Теорема о пределах суммы, произведения и частного облегчают нахождение пределов.

Пример 2. Найти предел функции $y=x^4+3x^2+4$ при $x\to2$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 2}\left(x^4+3x^2+4\right)=\lim_{x\to 2}x^4+\lim_{x\to 2}3x^2+\lim_{x\to 2}4.$$

Здесь мы воспользовались теоремой о пределе суммы.

Далее, так как предел степени равен степени предела, то

$$\lim_{x\to 2}x^4=\left[\lim_{x\to 2}x\right]^4=2^4=16;\quad \lim_{x\to 2}3x^2=3\lim_{x\to 2}x^2=3\left[\lim_{x\to 2}x\right]^2=3\cdot 2^2=12.$$

Замечая, наконец, что $\lim_{x\to 2}4=4$, получим

$$\lim_{x\to 2}\left(x^4+3x^2+4\right)=16+12+4=32.$$

Пример 3. Найти $\lim_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8}$.

Решение. Здесь непосредственно теорему о пределе дроби применить нельзя, так как предел знаменателя при $x\to 4$ равен нулю:

$$\lim_{x\to 4}\left(x^2-6x+8\right)=\lim_{x\to 4}x^2-6\lim_{x\to 4}x+8=4^2-6\cdot 4+8=0.$$

Кроме того, числитель дроби имеет предел, также равный нулю. Поэтому нахождение предела этой дроби сводится, как говорят, к раскрытию неопределенности *$0/0$. Для этого преобразуем дробь, разложив числитель и знаменатель на множители:

$$\frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8}=\frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-4)}.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на $x-4$. Это сокращение допустимо, так как при разыскании предела рассматриваются значения $x\neq 4$.

Итак, для всех значений $x\neq 4$ имеет место тождество

$$\frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-4)}=\frac{x-1}{x-2}.$$

Поэтому пределы этих функций равны между собой:

---

* Если при отыскании предела дроби $f(x)/\varphi(x)$ числитель и знаменатель стремятся одновременно к нулю или бесконечности, то будем говорить, что эта дробь представляет *неопределенность* вида $0/0$ или соответственно ∞/∞. Нахождение предела такой дроби условимся называть $0/0$ раскрытием вида $0/0$ или ∞/∞.

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-1}{x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 4}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 4}(x-2)}=\frac{4-1}{4-2}=\frac{3}{2}.$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2+6x+1}{6x^2+4x+2}$.

Решение. Здесь непосредственно применить теорему о пределе дроби нельзя, так как ни числитель, ни знаменатель дроби не имеют предела при $x\to+\infty$, одновременно стремясь к бесконечности. Таким образом, мы здесь имеем дело с неопределенностью вида ∞/∞. Для того чтобы найти предел данной дроби, предварительно преобразуем ее, разделив числитель и знаменатель на x^2; дробь от этого не изменит своей величины, а следовательно, и своего предела. После этого преобразования предел уже найти легко:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+6x+1}{6x^2+4x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5+\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{6+\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5+6/x+1/x^2\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(6+4/x+2/x^2\right)}=\frac{5}{6}.$$

Обобщая разобранные примеры, можно сделать следующий вывод: *При $x\to\pm\infty$ предел отношения двух многочленов одинаковых степеней равен отношению коэффициентов при старших степенях x. Если же степени многочленов не равны, то предел их отношения равен нулю, если степень числителя меньше степени знаменателя, и равен бесконечности, если степень числителя больше степени знаменателя.*

В заключение этого пункта приведем еще две теоремы о пределах.

Теорема 6. *Пусть даны три функции $\varphi(x), f(x), \mathrm{g}(x)$, удовлетворяющие неравенствам $\varphi(x)\le f(x)\le \mathrm{g}(x)$ для достаточно больших значений x. Если функции $\varphi(x)$* и *$\mathrm{g}(x)$ имеют один и тот же предел при $x\to+\infty$, то и функция $f(x)$, заключенная между ними, имеет предел, равный пределу функций $\varphi(x)$* и *$\mathrm{g}(x)$.*

Доказательство. Дано $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=b$. Требуется доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$. Доказательство теоремы ясно из рис. 2.38. действительно, так как функции $\varphi(x)$ и $g(x)$ имеют при $x \to +\infty$ пределом число *b,* то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое число *N*, что для $x > N$ графики функций $y = \varphi(x)$ и $y = g(x)$ одновременно окажутся внутри полосы, ограниченной прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$. Но тогда и график функции $y = f(x)$, лежащий между графиками функций $y = \varphi(x)$ и $y = g(x)$, для $x > N$ попадает внутрь этой же полосы. Это и значит, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$

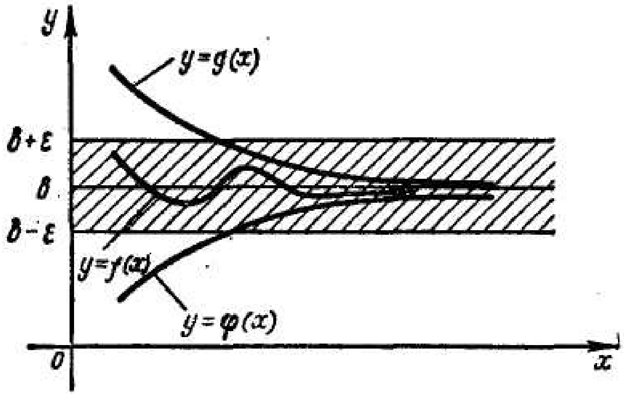


Рис. 2.38

Теорема 7. *Если функция* $y = f(x) \geq 0$ *для всех достаточно больших значений x и при* $x \to +\infty$ *имеет предел, то этот предел не может быть отрицательным.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. что $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b < 0$. Тогда каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое число *N*, что график функции $y = f(x)$ для $x > N$ попадает внутрь полосы, ограниченной прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$. Взяв ε столь малым, чтобы эта полоса лежала ниже оси *Ox*, и его точки, следовательно, имеют отрицательные ординаты. Но это противоречит тому, что $f(x) \geq 0$ для всех достаточно больших *x*. Итак, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \geq 0$.

2.6.7. Предел функции $\dfrac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$

Часто приходится иметь дело с пределом функции $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$. Как мы увидим, он равен 1. Предварительно докажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$, а $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

Пусть $0 < x < \pi/2$. Рассмотрим окружность единичного радиуса (рис. 2.39). Дуга $\overset{\cup}{AC}$ численно равна центральному углу *x*, выраженному в радианах, а отрезок *AB* численно равен $\sin x$. Так как $0 < AB < AC$ (рис. 2.39), то

$$0 < \sin x < x \qquad (2.6.7.1)$$

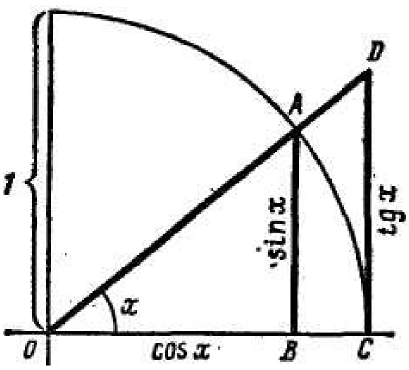


Рис. 2.39

Из неравенства (2.6.7.1) и теоремы 6 п. 2.6.6 следует, что при $x \to 0$*.

$$\lim_{x\to 0}\sin x = 0 \qquad (2.6.7.2)$$

Докажем теперь, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$. Замечая, что $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$, получим

$$\lim_{x\to 0}\cos x = \lim_{x\to 0}\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) = 1 - 2\lim_{x\to 0}\sin^2\frac{x}{2} = 1 - 2\cdot 0 = 1.$$

Теперь перейдем к рассмотрению прела функции $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$. Так как предел знаменателя дроби равен нулю, то теорема о пределе дроби здесь не применима *.

---

* Можно доказать, что формула (2.6.7.2) справедлива и в том случае, когда $x \to 0$, оставаясь отрицательным.

** поскольку при $x \to 0$ числитель дроби $\sin x$ тоже стремится к нулю, здесь имеет место неопределенность вида $0/0$.

Из рис. 2.39 непосредственно видно:

$$\text{пл. } \Delta OAB < \text{пл. сектора } OAC < \text{пл. } \Delta ODC; \qquad (2.6.7.3)$$

$$\text{пл. } \Delta OAB = \frac{\mathrm{OB}\cdot\mathrm{BA}}{2} = \frac{\cos x\cdot\sin x}{2}; \text{ пл. сектора } OAC =$$

$$= \frac{1}{2}R^2x = \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x = \frac{x}{2}; \quad \text{пл. } \Delta ODC = \frac{OC\cdot CD}{2} = \frac{1\cdot tgx}{2} = \frac{tgx}{2}.$$

Подставим найденные выражения для площадей в неравенства (2.6.7.3):

$$\frac{\cos x\cdot\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{tgx}{2}. \qquad (2.6.7.4)$$

Неравенства (2.6.7.4) справедливы для всех значений *x*, заключенных между нулем и $\pi/2$. Разделив все члены этих неравенств на $\frac{1}{2}\sin x$, получим

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

или

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x. \qquad (2.6.7.5)$$

Неравенства (2.6.7.5) были выведены в предположении, что $x > 0$. Но они верны и при $x < 0$, так как $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$, $\cos(-x) = \cos x$, $\frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x}$.

Выше мы видели, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$. Применив к частному $1/\cos x$ теорему о пределе дроби, получим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x} = \frac{1}{1} = 1$.

Обе крайние функции $\cos x$ и $1/\cos x$ неравенство (2.6.7.5) при $x \to 0$ имеют одинаковый предел, равный единице. Но тогда функция $\frac{\sin x}{x}$, заключенная между функциями $\cos x$ и $1/\cos x$, согласно теореме 6, п. 2.5.6, имеет тот же предел при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (2.6.7.6)$$

С помощью этого предела находятся другие пределы.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}$.

Р е ш е н и е. Числитель и знаменатель дроби при $x\to 0$ одновременно стремятся к нулю. Теорема о пределе дроби здесь неприменима. Для нахождения предела преобразуем данную дробь:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}\frac{\sin(x/2)}{x/2}\cdot\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x/2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x/2}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

2.6.8. Второй замечательный предел

Рассмотрим последовательность, общий член которой $y_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Покажем, что эта последовательность возрастает и ограничена.

Полагая $a=1$, $b=1/n$, по формуле бинома Ньютона имеем

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{n^3}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\frac{1}{n^n}.$$

Замечая, что

$$\frac{n(n-1)}{n^2}=1-\frac{1}{n},\quad \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right),\ \ldots,\ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2\cdot 1}{n^n}=$$

$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n}\dots\frac{\left[n-(n-1)\right]}{n}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)+\dots,$$

получим

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots$$

$$\dots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\dots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

С увеличением n дроби $1/n,\ 2/n,\ 3/n,\ \dots$ уменьшаются, а разности $1-\frac{1}{n},\ 1-\frac{2}{n},\ 1-\frac{3}{n},\ \dots\ 1-\frac{n-1}{n}$ увеличиваются. Поэтому с увеличением n 3-й, 4-й и т.д. члены разложения увеличиваются; кроме того, при этом добавляются новые положительные слагаемые. Следовательно, $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ с увеличением n возрастает. Итак, последовательность $\{y_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ - возрастающая. Покажем, что она ограничена.

Если в разложении для y_n отбросить в скобках дроби $\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \dots$, то каждое слагаемое, начиная с третьего, увеличится, и мы получим сумму, большую первоначальной:

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\dots n}$$

Но

$$\frac{1}{2\cdot 3}<\frac{1}{2\cdot 2}=\frac{1}{2^2},\quad \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2}=\frac{1}{2^3},\ \dots$$

$$\dots,\ \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\dots n}<\frac{1}{\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\dots 2}_{n-1\ \text{множитель}}}=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Поэтому

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Сумму $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$ найдем по формуле суммы членов убывающей геометрической прогрессии:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Поэтому $y_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n < 1+2 = 3$. Итак, данная последовательность ограничена.

Следовательно, на основании признака существования предела возрастающей ограниченной последовательности заключаем, что последовательность с общим членом $y_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ имеет предел. Этот предел играет большую роль в математике. Его называют числом *e*. Итак,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e. \qquad (2.6.8.1)$$

Число *e* иррационально. Его приближенное значение с точностью до 10^{-6}: $e \approx 2,718282$.

Рассмотрим функцию $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Можно доказать, что эта функция при непрерывном изменении *x* и стремлении его к $+\infty$ также имеет пределом число *e*:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \qquad (2.6.8.2)$$

Доказательства этого факта мы не приводим.

С помощью формулы (2.6.8.2) вычисляются многие пределы.

Пример 1. Показать, что $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Р е ш е н и е. Сделаем, как говорят, замену переменной, положив $x=-(t+1)$. Тогда очевидно, что $t\to+\infty$ при $x\to-\infty$. Поэтому

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to+\infty}\left[1+\frac{1}{-(t+1)}\right]^{-(t+1)}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}=\lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)\right]=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)=e\cdot 1=e.$$

Итак,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Так как функция $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ имеет один и тот же предел как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$, то часто пишут просто

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Пример 2. Найти предел функции $y=(1+\alpha)^{1/\alpha}$ при $\alpha\to 0$.

Р е ш е н и е. Для отыскания предела сделаем замену переменной, полагая $1/\alpha=x$. Тогда $x\to\infty$ при $\alpha\to 0$. Поэтому

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Пример 3. Найти $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$.

Р е ш е н и е. Положим $x=2t$. При $x\to\infty$ и $t\to\infty$. Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e\cdot e=e^{2}.$$

В заключение отметим, что часто приходится рассматривать показательную функцию с основанием *e*, т.е. $y = e^x$.

2.6.9. Сравнение бесконечно малых функций

Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to +\infty$. Рассмотрим предел отношения этих функций при $x \to +\infty$ и введем следующие определения *.

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *бесконечно малыми одного и того же порядка малости* при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ существует и не равен нулю.

Функция $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка малости,* чем функция $\psi(x)$ при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0$.

Функция $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой более низкого порядка малости,* чем $\psi(x)$ при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \infty$.

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *несравнимыми бесконечно малыми* при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ существует и не равен ∞.

Пример 1. Функция $y = x^2$ является бесконечно малой при $x \to 0$ более высокого порядка малости, чем функция $y = 5x$, так как $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{5x} = \dfrac{1}{5} \lim\limits_{x \to 0} x = 0$. При приближении *x* к нулю функция $y = x^2$ стремится к нулю быстрее, чем функция $y = 5x$.

Пример 2. Функции $y = x^2 - 4$ и $y = x^2 - 5x + 6$ являются бесконечно малыми одного порядка малости при $x \to 2$, так как

* Аналогичные определения вводятся при $x \to -\infty$, при $x \to x_0$ справа и слева, а также при $x \to x_0$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}=\frac{4}{-1}=-4\neq 0.$$

Пример 3. Функции $\varphi(x)=\dfrac{\cos x}{x}$ и $\psi(x)=\dfrac{1}{x}$ являются несравнимыми бесконечно малыми при $x\to+\infty$, так как не существует предела их отношения $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\cos x$.

Введем теперь понятие эквивалентных бесконечно малых функций.

Две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, бесконечно малые при $x\to+\infty$, называются *эквивалентными* (или *равносильными*), если предел их отношения при $x\to+\infty$ равен единице [*].

Из определения следует, что эквивалентные бесконечно малые функции имеют одинаковый порядок малости.

Например, функции x, $\sin x$, tgx являются эквивалентными бесконечно малыми функциями при $x\to 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}=1$ (см. п. 2.6.7).

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - эквивалентные бесконечно малые функции при $x\to x_0$: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$. Тогда для значений *x*, близких к x_0, имеет место приближенное равенство $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}\approx 1$, или $\varphi(x)\approx\psi(x)$, точность которого возрастает с приближением *x* к x_0.

Так как $\sin x$ и *x* –эквивалентные бесконечно малые при $x\to 0$, то для *x*, близких к нулю, $\sin x\approx x$. Эти обстоятельством широко пользуются, заменяя при малых *x* величину $\sin x$ аргументом *x*.

Так, например, если $x=0{,}1$, то $\sin x=\sin 0{,}1=0{,}0998\approx 0{,}1$.

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - эквивалентные бесконечно малые функции, то это обозначают так: $\varphi(x)\sim\psi(x)$.

[*] См. сноску на с. 99.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi(x) \sim \varphi_1(x)$ *и* $\psi(x) \sim \psi_1(x)$ *при* $x \to +\infty$. *Если существует* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}$, *то существует и* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, *и оба эти предела равны между собой.*

Кратко эта теорема формулируется следующим образом: *предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения эквивалентных им функции.*

Доказательство. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} \cdot \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)} \cdot \frac{\psi_1(x)}{\psi(x)} \right] =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{\psi_1(x)}{\psi(x)} = 1 \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)} \cdot 1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}.$$

Доказанная теорема позволяет во многих случаях упрощать отыскание предела.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{tg 3x}$.

Р е ш е н и е. Так как $\sin 5x \sim 5x$, $tg 3x \sim 3x$ при $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{tg 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}.$$

В заключение этого параграфа приведем признак эквивалентности двух бесконечно малых функций.

Теорема 2. *Бесконечно малые функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность есть бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - бесконечно малые функции, например при $x \to +\infty$, и $\beta(x) = \varphi(x) - \psi(x)$.

1. Покажем, что если $\varphi(x) \sim \psi(x)$, то $\beta(x)$ - бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, т.е. что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\beta(x)}{\varphi(x)}=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\beta(x)}{\psi(x)}=0$. В самом деле,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\beta(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)-\psi(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left[1-\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right]=$$

$$=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=1-1=0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\beta(x)}{\psi(x)}=0.$$

2. Пусть, обратно, $\beta(x)$ - бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Докажем, что $\varphi(x) \sim \psi(x)$, т.е. что $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$.

Действительно, так как $\beta(x)=\varphi(x)-\psi(x)$, то $\varphi(x)=\beta(x)+\psi(x)$. Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\beta(x)+\psi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\beta(x)}{\psi(x)}+1=0+1=1,$$

так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\beta(x)}{\psi(x)}$ по условию равен нулю.

Теорема 3. *Сумма конечного числа бесконечно малых функций различных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.*

Доказательство. Рассмотрим для определенности сумму трех бесконечно малых функций при $x\to+\infty$: $F(x)=f(x)+\varphi(x)+g(x)$. Пусть, например, $f(x)$ - бесконечно малая функция низшего порядка малости, чем остальные слагаемые. Это значит, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=0.$$

Тогда

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)+\varphi(x)+g(x)}{f(x)}\right]=$$

$$=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{f(x)}+\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=1+0+0=1$$

Следовательно, сумма $f(x)+\varphi(x)+g(x)$ - бесконечно малая функция, эквивалентная функции $f(x)$.

Пример 5. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x+6x^2}{\sin x+tg^2x}.$$

Р е ш е н и е. Так как при $x\to 0$ по теореме 3 имеем $5x+6x^2\sim 5x$, а $\sin x+tg^2x\sim \sin x$, то, применяя теорему 1, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x+6x^2}{\sin x+tg^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin x}=5.$$

2.7. Непрерывные функции

2.7.1. Непрерывность функции в точке. Точка разрыва

Представление о непрерывности функции интуитивно связано у нас с тем, что ее графиком является плавная, нигде не прерывающаяся линия. При рассмотрении графика такой функции $y=f(x)$ мы видим, что близким значениям аргумента соответствуют близкие значения функции; если независимая переменная x приближается к точке x_0, то значение функции $y=f(x)$ неограниченной приближается к значению функции в точке x_0 (рис. 2.40).

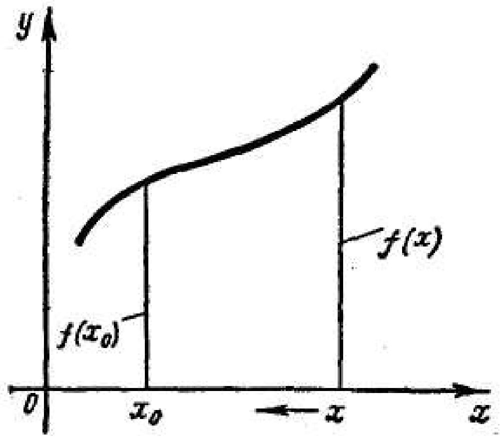


Рис. 2.40

Дадим теперь строгое определение непрерывности функции.

Функция $y = f(x)$ *называется непрерывной в точке* x_0*, если:*

1) *функция определена в точке* x_0 *и в некоторой ее окрестности, содержащей эту точку;*

2) *функция имеет предел при* $x \to x_0$*;*

3) *предел функции при* $x \to x_0$ *равен значению функции в точке* x_0*:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{2.7.1.1}$$

Если в точке x_0 функция непрерывна, то точка x_0 называется *точка непрерывности* данной функции.

З а м е ч а н и е 1. Формулу (2.7.1.1) можно записать в виде

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right), \tag{2.7.1.2}$$

так как $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$. Формула (2.7.1.2) означает, что при нахождении предела непрерывной функции можно переходить к пределу под знаком функции.

З а м е ч а н и е 2. Часто приходится рассматривать непрерывность функции в точке x_0 справа или слева (т.е. одностороннюю непрерывность). Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0. Если $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$, то говорят, что функция $y=f(x)$ *непрерывна* в точке x_0 *справа*; если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$, то функция называется *непрерывной* в точке x_0 *слева.*

Введем теперь понятие точки разрыва.

Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $y=f(x)$, если она принадлежит области определения функции или ее границе и не является точкой непрерывности*

В этом случае говорят, что при $x=x_0$ функция разрывна. Это может произойти, если в точке x_0 функция не определена, или не существует предел функции при $x\to x_0$, или, наконец, если предел функции существует, но не равен значению функции в точке x_0:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0).$$

Пример 1. Рассмотрим функцию $y=5x^3$. Докажем, что она непрерывна в точке $x=2$. Для этого надо показать, что в точке $x=2$ выполнены все три условия, входящие в определение непрерывной функции, т.е. что: 1) функция определена в точке $x=2$ и в некоторой ее окрестности; 2) существует $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ и 3) этот предел равен значению функции в точке $x=2$. Так как функция $f(x)=5x^3$ определена на всей числовой оси, то первое условие автоматически выполняется. Далее, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} 5x^3=40$. Итак, второе условие выполнено. Замечая, наконец, что $f(2)=40$, мы видим, что $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$, т.е. и третье условие, определяющее непрерывность функции в точке $x=2$, выполнено. Таким образом, функция $y=5x^3$ непрерывна в точке $x=2$. Аналогично можно показать, что эта функция непрерывна в любой точке числовой оси.

Пример 2. Рассмотрим функцию

---

* Точка x_0 называется *граничной точкой* области определения функции, если любая окрестность этой точки содержит как точки области определения функции, так и точки, не принадлежащие области определения. Совокупность всех граничных точек называется *границей* области. Так, например, для функции $y=1\big/\sqrt{1-x^2}$ областью определения является интервал $[-1,\ 1]$, а ее граница состоит из двух точек $x=-1$ и $x=1$.

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{если } 0 \le x < 3; \\ 3-x, & \text{если } 3 \le x \le 4, \end{cases}$$

приведенную в примере 2 п. 2.6.3. Эта функция определена во всех точках сегмента $[0,\ 4]$ и ее значение при $x=3$ равно 0 (см. график функции на рис. 2.37). Однако в точке $x=3$ функция претерпевает разрыв, так как она не имеет предела при $x \to 3$: $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=2$, а $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)=0$. Следует заметить, что функция $f(x)$ непрерывна во всех точках сегмента $[0,\ 4]$, за исключением точки $x=3$. При этом в точке $x=0$ она непрерывна справа, а в точке $x=4$ - непрерывна слева (см. замечание 2 п. 2.7.1), так как

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}(x-1)=f(0)=-1,$$
$$\lim_{x\to 4-0} f(x)=\lim_{x\to 4-0}(3-x)=f(x)=-1.$$

Пример 3. Функции $y=1/x$ и $y=1/x^2$ (рис. 2.41) разрывны в граничной точке области определения $x=0$, так как они не определены в этой точке. Функции $y=1/x$ и $y=1/x^2$ являются бесконечно большими функциями при $x \to 0$. Поэтому говорят, что в точке $x=0$ эти функции имеют бесконечный разрыв.

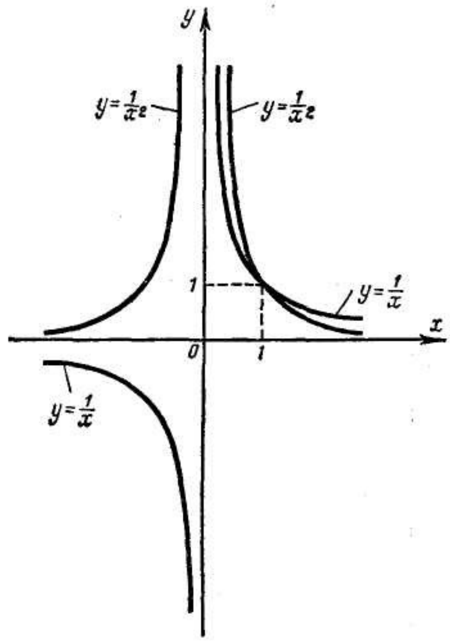


Рис. 2.41

Точки разрыва функции можно разбить на два типа.

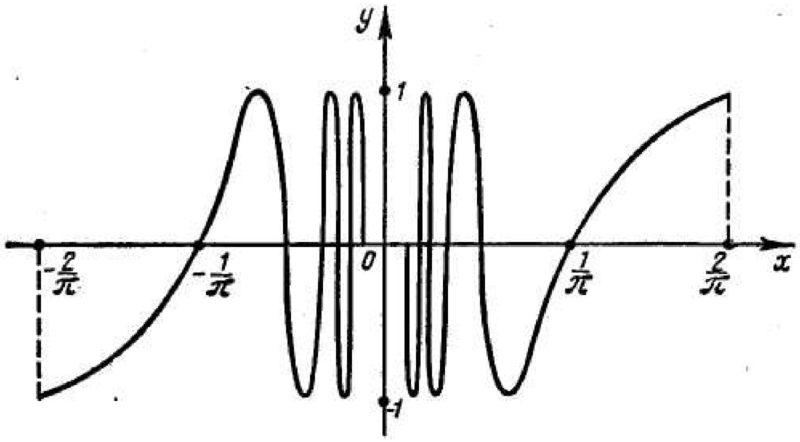
Точка разрыва x_0 функции $f(x)$ называется *точкой разрыва* I *рода,* если существуют оба односторонних предела $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$. Точка разрыва, не являющаяся точкой I рода, называется *точкой разрыва* II *рода.*

Функция $f(x)$, приведенная в примере 2, имеет в точке $x = 3$ разрыв I рода, так как для нее существуют пределы при $x \to 3$ справа и слева.

Функция $y = 1/x$ и $y = 1/x^2$, рассмотренные в примере 3, в точке $x = 0$ имеют разрыв II рода, так как эти функции при $x \to 0$ не имеют предела ни справа, ни слева.

Пример 4. Функция $y = \sin\frac{1}{x}$ определена для всех значений *x*, кроме $x = 0$. В этой точке она имеет разрыв. Точка $x = 0$ есть точка разрыва II рода, так как при $x \to 0$ как справа, так и слева, функция $\sin\frac{1}{x}$, колеблясь между -1 и 1, не приближается ни к какому значению. График ее приведен на рис. 2.42.

Рис. 2.42



Пример 5. Функция $\frac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x = 0$. Точка $x = 0$ является точкой разрыва I рода, так как при $x \to 0$ существуют пределы справа и слева:

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Если доопределить функцию $\frac{\sin x}{x}$ в точке $x=0$, полагая $f(0)=1$, то получим уже непрерывную функцию, определенную так:

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}, \text{ если } x \neq 0;\ f(0)=1.$$

Доопределив функцию в точке $x=0$, мы устранили разрыв.

Точка x_0 разрыва I рода, в которой $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, называется *точкой устранимого разрыва.*

Пусть x_0 - точка разрыва I рода. *Скачком* функции в точке x_0 называют разность $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$. Так функция, рассмотренная в примере 2, имеет в точке $x_0=3$ скачок, равный $0-2=-2$.

В заключение этого пункта отметим одно свойство функции, непрерывной в точке. *Если непрерывная в точке x_0 функция $f(x)$ имеет в точке x_0 положительное (отрицательное) значение, то она остается положительной (отрицательной) во всех точках некоторой окрестности точки x_0.*

В самом деле, пусть, например, $f(x_0)>0$ возьмем такое $\varepsilon>0$, что $f(x_0)-\varepsilon>0$. Так как $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ (в силу непрерывности функции в точке x_0), то на основании определения предела функции при $x\to x_0$ (см. п. 2.6.3)

$$\underset{N,M}{\exists}(N<x_0<M)\underset{x}{\forall}\left(x\in[N,M]\right)\Rightarrow\left\{\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon\right\}\Leftrightarrow\left\{f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon\right\}$$

Но так как $f(x_0)-\varepsilon>0$, то и $f(x)>0$ для всех точек интервала $[N,\ M]$. Итак, функция $f(x)$ положительна в некоторой окрестности точки x_0.

2.7.2. Операции над непрерывными функциями. Непрерывность элементарных функций

Если над непрерывными функциями производить операции сложения, умножения и деления (при условии, что делитель не равен нулю), то полученные в результате этого функции являются непрерывными.

Теорема 1. *Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны в точке x_0, то их сумма и произведение также непрерывны в точке x_0.*

Доказательство. Докажем, например, непрерывность произведения $f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$. В точке x_0 функция $f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$ определена, причем $f(x_0)=\varphi(x_0)\cdot\psi(x_0)$. Из непрерывности функций в точке x_0 следует: $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=\psi(x_0)$. Применяя теорему о пределе произведения, получим:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0}\left[\varphi(x)\cdot\psi(x)\right]=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\psi(x)=\varphi(x_0)\cdot\psi(x_0).$$

Итак, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, что и доказывает непрерывность функции $\varphi(x)\cdot\psi(x)$ в точке x_0. Аналогично доказываются остальные утверждения теоремы. Теорема обобщается на любое конечное число слагаемых или сомножителей.

Установим непрерывность некоторых элементарных функций.

Ясно, что постоянная функция $y=C$ непрерывна на всей числовой оси. Легко показать, что функция $y=x$ также непрерывна во всей области ее определения, т.е. на всей числовой оси. Поэтому функция $y=Cx^n$, где *n* – целое положительное число, непрерывна на всей числовой оси, как произведение непрерывных функций:

$$Cx^n=C\underbrace{\cdot x\cdot x\ldots x}_{n\ \text{множителей}}.$$

Многочлен

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a^n$$

- непрерывная функция на всей числовой оси, как сумма непрерывных функций. Далее, рациональная функция, являющаяся частным от деления двух многочленов, по теореме 1 непрерывна во всех точках, кроме тех, где знаменатель обращается в нуль. Так, например, функция $y = \frac{x^2 + 5x + 3}{x^2 - 1}$ непрерывна во всех точках числовой оси, за исключением точек $x = -1$ и $x=1$. Вообще, можно доказать, что *все основные элементарные функции непрерывны при всех значениях x, для которых они определены.*

Теорема 2. *Если функция* $u = \varphi(x)$ *непрерывна в точке* x_0*, а функция* $y = f(u)$ *непрерывна в точке* $u_0 = \varphi(x_0)$*, то сложная функция* $y = f\left[\varphi(x)\right]$ *непрерывна в точке* x_0*.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно установить, что $\lim\limits_{x \to x_0} f\left[\varphi(x)\right] = f\left[\varphi(x_0)\right]$- Действительно, в силу непрерывности функции $u = \varphi(x)$, имеем $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$, т. е. при $x \to x_0$ также и $u \to u_0$.

Поэтому, вследствие непрерывности функции $f(u)$,

$$\lim_{x \to x_0} f\left[\varphi(x)\right] = \lim_{u \to u_0} f(u) = f\left[\varphi(x_0)\right].$$

Приведем краткую формулировку доказанной теоремы.

Сложная функция $y = f\left[\varphi(x)\right]$*, образованная из двух непрерывных функций* $f(u)$ *и* $\varphi(x)$ *есть непрерывная функция.*

Так, например, сложная функция $y = \sin\left(x^3 + 4x - 2\right)$ непрерывна для всех значений *x,* так как функции $y = \sin u$ и $u = x^3 + 4x - 2$ всюду непрерывны. Сложная функция $y = \ln\left(1 - x^2\right)$ непрерывна для всех значений *x,* удовлетворяющих неравенству $1 - x^2 > 0$, т. е. в интервале $(-1, 1)$.

Как мы знаем, элементарной функцией называется такая функция, которую можно задать одним аналитическим выражением, составленным из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий и конечного числа образований сложных функций. Так как основные элементарные функции непрерывны во всех точках, в которых они определены, то из теорем 1 и 2 следует: *всякая элементарная функция непрерывна во всех точках, принадлежащих ее области определения.*

Этот важный результат позволяет легко находить предел элементарной функции при $x \to x_0$, если функция определена в точке $x = x_0$. Для этого достаточно вычислить значение функции в этой точке:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = f(x_0). \qquad (2.7.2.1)$$

Пример. Найти $\lim\limits_{x \to \pi/4} 5^{tgx}$

Решение. Так как функция 5^{tgx} непрерывна в точке $x = \pi/4$, то $\lim\limits_{x \to \pi/4} 5^{tgx} = 5^{tg(\pi/4)} = 5^1 = 5$.

В заключение этого пункта рассмотрим два предела, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Сначала найдем $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x}$.

Заметим, что при $x \to 0$ числитель и знаменатель одновременно стремятся к нулю, так как $\lim\limits_{x \to 0} \log_a(1+x) = \log_a(1+0) = 0$. Поэтому здесь теорема о пределе дроби не применима. Выполним следующее преобразование:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0}\left[\frac{1}{x} \cdot \log_a(1+x)\right] = \lim_{x \to 0} \log_a(1+x)^{1/x}.$$

Так как логарифмическая функция непрерывна , то мы можем перейти к пределу под знаком функции, т.е.

$$\lim_{x \to 0} \log_a(1+x)^{1/x} = \log_a\left[\lim_{x \to 0}(1+x)^{1/x}\right]$$

Но $\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{1/x} = e$. Поэтому

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e. \qquad (2.7.2.2)$$

В частности, при $a = e$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1. \qquad (2.7.2.2')$$

Таким образом, $y=\ln(1+x)$ и $y=x$ - эквивалентные бесконечно малые функции при $x\to 0$.

Найдем теперь $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

Здесь мы имеем дело с неопределенностью вида $0/0$. Для нахождения предела сделаем замену переменной, положив $a^x-1=t$. Тогда $x=\log_a(t+1)$. Замечая, что при $x\to 0$ также и $t\to 0$, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(t+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(t+1)}{t}}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\log_a(t+1)}{t}}.$$

Так как на основании формулы (2.7.2.2) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\log_a(t+1)}{t}=\log_a e$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a. \qquad (2.7.2.3)$$

В частности, отсюда следует, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\ln e=1, \qquad (2.7.2.3')$$

т.е. $y=e^x-1$ и $y=x$ при $x\to 0$ - эквивалентные бесконечно малые функции.

2.7.3. Свойства функций, непрерывных на отрезке

В этом пункте мы рассмотрим некоторые свойства непрерывных функций; при этом, как правило, ограничимся только формулировками и пояснениями, не приводя доказательств.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на сегменте* $[a, b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках этого сегмента, а на концах сегмента, т. е. в точках a и b, непрерывна соответственно справа и слева [*].

---

[*] Т.е. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$, $\quad \lim\limits_{x\to b-0} f(x)=f(b)$ (см. замечание 2 в п. 2.7.3)

Теорема 1. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[a, b]$, *то она достигает на этом сегменте своего наибольшего и наименьшего значений.*

Эта теорема утверждает, что на сегменте $[a, b]$ найдется такая точка x_1, что значение функции $f(x)$ в этой точке является наибольшим из всех значений функций на сегменте: $f(x) \le f(x_1)$. Аналогично, на сегменте найдется такая точка x_2, в которой значение функции является наименьшим из всех значений функции на сегменте: $f(x) \ge f(x_2)$ (рис. 2.43).

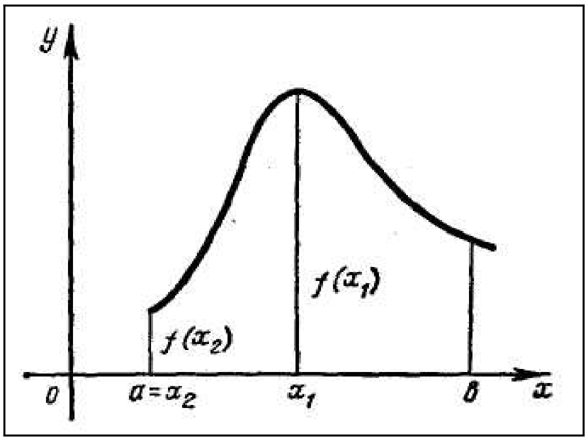


Рис. 2.43

З а м е ч а н и е. Утверждение теоремы, вообще говоря, делается неверным, если заменить в формулировке теоремы сегмент на интервал (a, b). Так, например, функция $y = 5x$, непрерывная в интервале (0, 1), не достигает на этом интервале наибольшего значения. Она принимает значение, сколь угодно близкое к 5, однако в интервале (0, 1) нет точки, в которой функция равнялась бы 5 (точка x=1 не принадлежит интервалу). Эта функция не принимает и наименьшего значения в интервале (0, 1). Точно так же заключение теоремы перестает быть, вообще говоря, справедливым, если функция, будучи определенной на сегменте, терпит разрыв в какой-либо точке сегмента.

С л е д с т в и е. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[a, b]$, *то она ограничена на этом сегменте.*

Доказательство. Обозначим через M и m соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$. Тогда для любого x, принадлежащего сегменту, имеют место неравенства $m \le f(x) \le M$.

Пусть C — наибольшее из чисел $|m|$, $|M|$. Тогда $|f(x)| \leq C$, а это значит, что функция $y = f(x)$ ограничена на сегменте $[a, b]$.

Теорема. 2. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри этого сегмента найдется по крайней мере одна точка, в которой функция равна нулю.*

Геометрический смысл теоремы заключается в следующем: если точки графика функции $y = f(x)$, соответствующие концам сегмента $[a, b]$, лежат по разные стороны от оси Ox, то этот график хотя бы в одной точке сегмента пересекает ось Ox. Для функции, график которой представлен на рис. 2.44, таких точек три: x_1, x_2 и x_3.

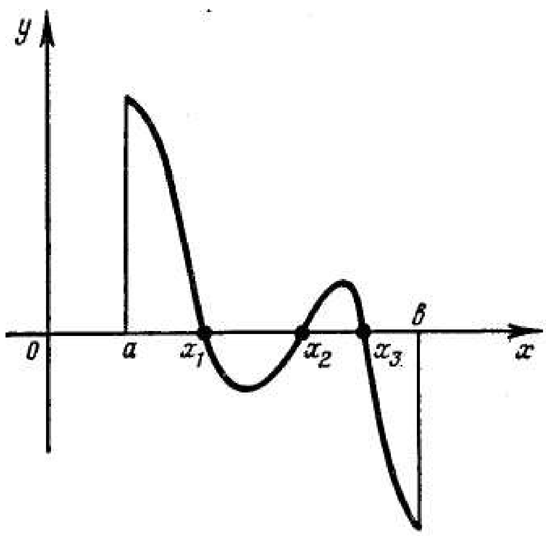
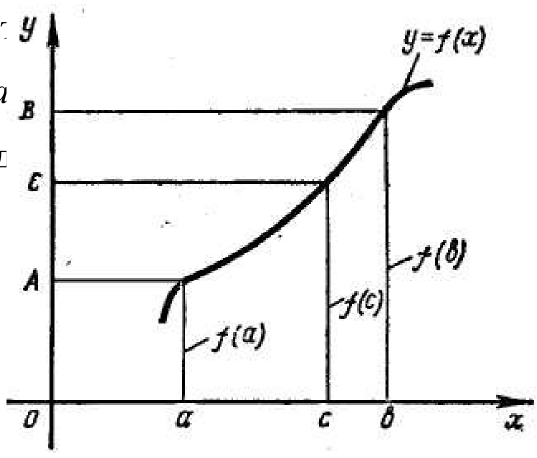


Рис. 2.44

Эта теорема допускает следующее обобщение.

Теорема 3 (теорема о промежуточных значениях). *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$. Тогда для любого числа C, заключенного между A и B, найдется внутри этого сегмента такая точка c, что $f(c) = C$.*

Эта теорема геоме



к функции $y =$ *$f(x)$* (рис. 2.45). Пусть $f(a$ где C — любое число, заключенное межд крайней мере в одной точке.

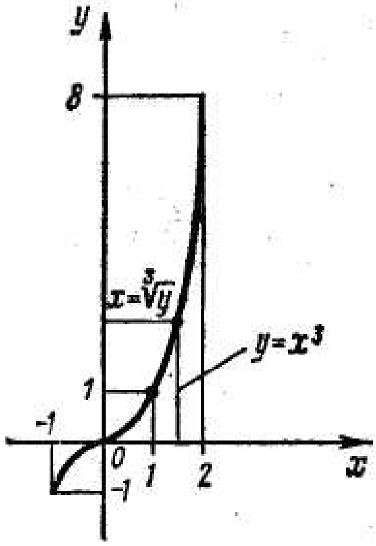
Рис. 2.45

Таким образом, непрерывная функция, переходя от одного значения к другому, обязательно проходит через все промежуточные значения.

З а м е ч а н и е. Если функция на сегменте имеет хотя бы одну точку разрыва, то утверждения теорем 2 и 3 перестают быть верными. Так, например, функция $y=1/x$ положительна при $x=1$ и отрицательна при x = —1. Однако на сегменте [—1, 1] нет точки, в которой она обращается в нуль. Это объясняется тем, что на сегменте [—1, 1] имеется точка разрыва функции y = $1/x$ (см. рис. 2.41).

2.7.4. Понятие об обратной функции

Рассмотрим функцию $y = x^3$ для всех $x \in [-1,\ 2]$. Эта функция, график которой представлен на рис. 2.46, осуществляет отображение сегмента [—1, 2] (область определения функции) на сегмент [—1, 8] (множество значений этой функции). Будем рассматривать равенство $y = x^3$ как уравнение относительно x. Это уравнение для каждого значения $y \in [-1,\ 8]$ определяет единственное значение $x \in [-1,\ 2]$ ... ески это значит, что всякая прямая, проходящая ... 8] параллельно оси Ox, пересекает график ф... очке (см. рис. 2.46). Иными словами, каждому зн... соответствие единственное значение $x \in [-1,\ 2]$. ... е [—1, 8] задана функция



$x = \sqrt[3]{y}$, которая отображает этот сегмент на сегмент [—1, 2]. Функция $x = \sqrt[3]{y}$ называется *обратной* по отношению к функции $y = x^3$.

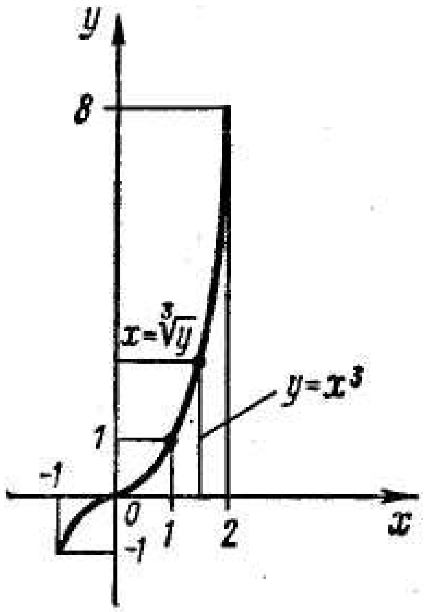


Рис. 2.46

Перейдем теперь к общему случаю. Рассмотрим функцию $y = f(x)$ с областью определения *M* и множеством значений *L*. Пусть эта функция такова, что всякая прямая, проходящая через точку множества *L* параллельно оси *Ox,* пересекает ее график только в одной точке, т. е. что уравнение $y = f(x)$ для каждого $y \in L$ определяет единственное значение $x \in M$ (рис. 2.47). В этом случае каждому значению $y \in L$ соответствует единственное значение $x \in M$, т. е. на множестве L задана функция, множество значений которой есть *M.* Эта функция называется *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$ и обозначается $x = f^{-1}(y)$. Очевидно, что для функции $x = f^{-1}(y)$ обратной является функция $y = f(x)$. Поэтому обе эти функции называются *взаимно обратными.*

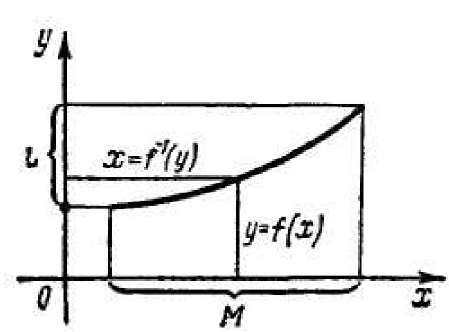


Рис. 2.47

Данная функция $y = f(x)$ и ее обратная функция $x = f^{-1}(y)$ выражают одну и ту же связь между переменными x и y. Но в первом случае мы рассматриваем x как независимую переменную, а y как функцию; во втором случае — наоборот: y мы считаем независимой переменной, а x — функцией. Таким образом, одна и та же линия служит графиком для данной функции $y = f(x)$ и для обратной функции $x = f^{-1}(y)$. Однако если для данной функции ось Ox является осью независимой переменной, то для обратной функции $x = f^{-1}(y)$ осью независимой переменной служит ось Oy.

Заметим, что некоторые функции не имеют обратных. Например, функция $y = x^2$, если ее рассматривать на всей числовой оси, не имеет обратной функции, так как каждому значению $y > 0$ соответствуют два значения $x : x = \sqrt{y}$ и $x = -\sqrt{y}$. Если функцию $y = x^2$ рассматривать на интервале $0 \le x < +\infty$, то она имеет обратную функцию $x = \sqrt{y}$, так как каждому значению y соответствует единственное значение $x(0 \le x < +\infty)$, удовлетворяющее уравнению $y = x^2$.

Если же функцию $y = x^2$ рассматривать на интервале $-\infty < x \le 0$, то мы приходим к другой обратной функции $x = -\sqrt{y}$. Естественно, возникает вопрос: какова должна быть функция $y=f(x)$, чтобы она имела обратную?

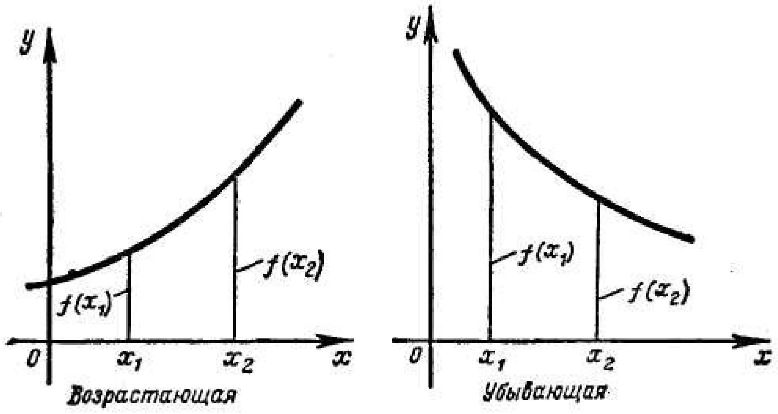
Прежде чем ответить на этот вопрос, введем понятия возрастающей и убывающей функции. Пусть функция $y = f(x)$ определена на сегменте (или интервале).

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на некотором сегменте (или интервале), если большим значениям независимой переменной из этого сегмента (или интервала) соответствуют большие значения функции, т. е. если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$.

Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на некотором сегменте (или интервале), если большим значениям независимой переменной соответствуют меньшие значения функции, т. е. если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$.

На рис. 2.48 приведены графики возрастающей и убывающей функций. Например, функция $y = x^3$ является возрастающей на всей числовой оси; функция $y = x^2$ при $0 \le x < +\infty$ возрастает, а при $-\infty < x \le 0$ убывает.

Рис. 2.48



Если функция $y = f(x)$, заданная на интервале (или сегменте), является только возрастающей или только убывающей на этом интервале (или сегменте), то она называется *монотонной* на интервале (или сегменте).

Из рис. 2.48 непосредственно видно, что каждая прямая, параллельная оси *Ox,* пересекает график монотонной функции в одной точке, т. е. каждому значению *y* соответствует единственное значение *x,* и, следовательно, функция $y = f(x)$ имеет обратную. Можно показать, что если функция $y = f(x)$ непрерывна, то и обратная функция $x = f^{-1}(y)$ непрерывна.

Приведем без доказательства теорему существования обратной функции.

Теорема. *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на сегменте* [*a*, *b*] *и возрастает (или убывает) на этом сегменте, то обратная функция* $x = f^{-1}(y)$ *на соответствующем сегменте оси Oy существует и является также непрерывной возрастающей (убывающей) функцией.*

Практически, чтобы найти для функции $y = f(x)$, заданной е помощью формулы, обратную ей функцию $x = f^{-1}(y)$, нужно разрешить уравнение $y = f(x)$, если это возможно, относительно *x*. Так, например, разрешая относительно *x* уравнение $y = \dfrac{2x+3}{x-5}$ получим функцию $x = \dfrac{5y+3}{y-2}$ обратную данной.

Замечание. Пусть функция $x = f^{-1}(y)$ является обратной по отношению к функции $y = f(x)$. Возвращаясь к обычному обозначению независимой переменной через *x,* а функции — через *y,* мы можем эту обратную функцию записать в виде $x = f^{-1}(y)$. Так, например, для $y = x^3$ обратной является функция $x = \sqrt[3]{y}$, или, если изменить обозначения переменных, функция $y = \sqrt[3]{x}$.

График обратной функции $x = f^{-1}(y)$ симметричен с графиком данной функции $y = f(x)$ относительно биссектрисы I и III координатных углов. В этом легко убедиться из рис. 2.49.

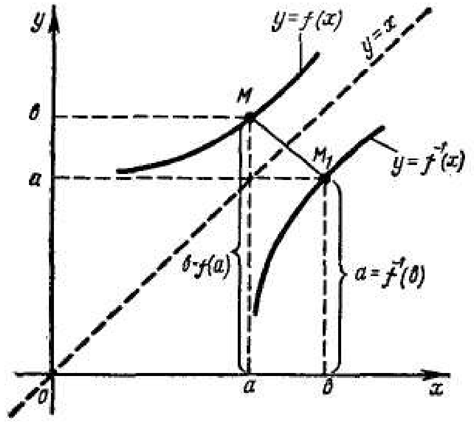


Рис. 2.49

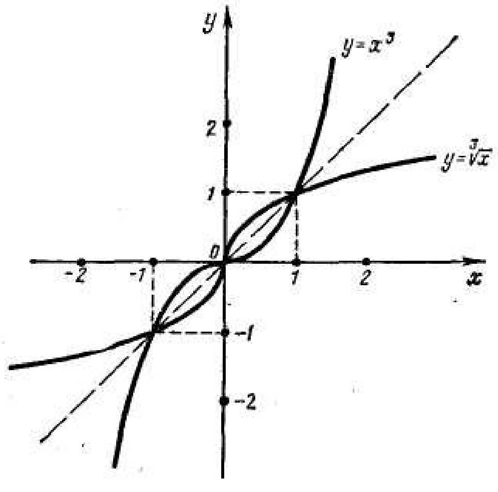


Рис. 2.50

На рис. 2.50 изображены графики функции $y = x^3$ и обратной функции $y = \sqrt[3]{x}$.

2.7.5. Обратные тригонометрические функции

Функция $y = \arcsin x$. Если рассматривать функцию $y = \sin x$ на всей числовой оси ($-\infty < x < +\infty$), то она не имеет обратной, так как одному значению $y = (-1 \le y \le 1)$ соответствует бесконечное множество значений *x:* $x_1, x_2, x_3, \dots$. Например, если *у* =1/2, то $x_1 = \pi/6$, $x_2 = \pi - \pi/6$, $x_3 = 2\pi + \pi/6$, ... (рис. 2.51). Если же функцию *у* = sin *x* рассматривать только на сегменте $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, то на нем функция *у* = *sinx* является непрерывной и возрастающей и, следовательно, имеет обратную функцию, которую принято обозначать *x* = arcsin*y*. Обозначив независимую переменную через *x,* а функцию — через *у,* получим *у* = arcsin*x*. График этой функции, изображенный на рис. 2.52, симметричен с графиком функции $y = \sin x\left(-\pi/2 \le x \le \pi/2\right)$ относительно прямой *у* = *x*.

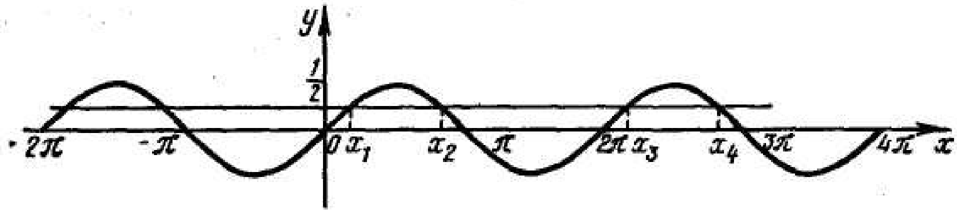


Рис.2.51

Функция $y = \arcsin x$; определена на сегменте [— 1, 1] и принимает значения, принадлежащие сегменту $-\pi/2 \le x \le \pi/2$.

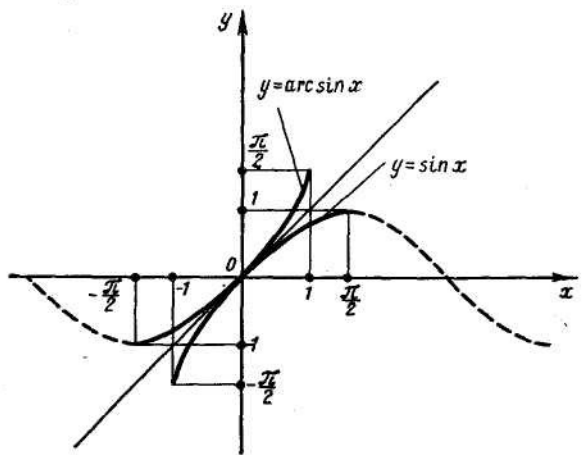


Рис. 2.52

Функция y = arccos$x$. Эта функция определяется как обратная по отношению к функции y = cos$x$, если последнюю рассматривать на сегменте $[0,\ \pi]$. На этом сегменте функция y = cos$x$ убывает.

Функция $y = \arccos x$ определена на сегменте [—1, 1], а ее значения принадлежат сегменту $[0,\ \pi]$. График функции $y = \arccos x$ представлен на рис. 2.53.

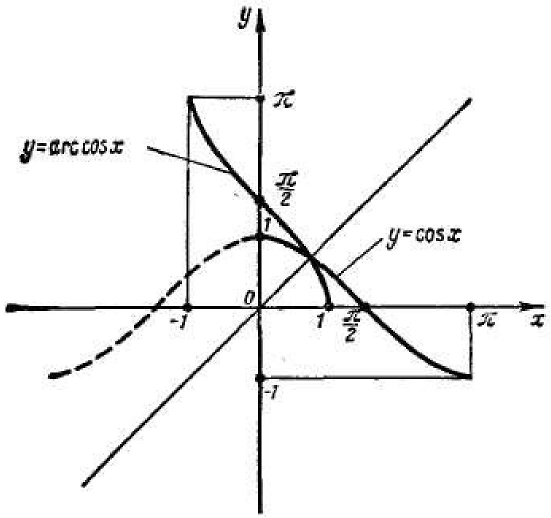


Рис. 2.53

Функция $y = arctgx$. Эта функция определяется как обратная по отношению к функции *y* = *tgx,* если последнюю рассматривать для всех значений *x,* лежащих между $-\pi/2$ и $\pi/2$. На рис. 2.53 представлен график функции $y = arctgx$.

Функция $y = arctgx$ определена на всей числовой прямой, а ее значения принадлежат интервалу $(-\pi/2,\ \pi/2)$; при этом $\lim\limits_{x\to-\infty} arctgx = -\pi/2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} arctgx = \pi/2$ (см. рис. 2.54).

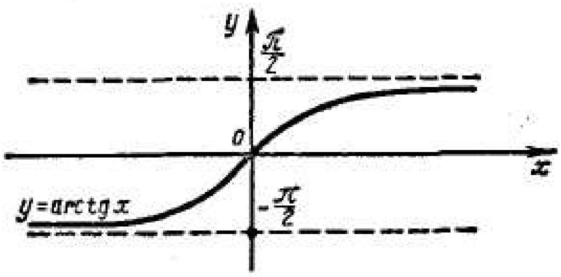


Рис. 2.54

Функция $y = arcctgx$. Эта функция определяется как обратная по отношению к функции $y = ctgx$, если последнюю рассматривать на интервале $(0,\ \pi)$. График функции $y = arcctgx$ представлен на рис. 2.55.

Функция $y = arcctgx$ определена на всей числовой прямой, причем $\lim\limits_{x \to -\infty} arcctgx = \pi$, $\lim\limits_{x \to +\infty} arcctgx = 0$ (см. рис. 2.55).

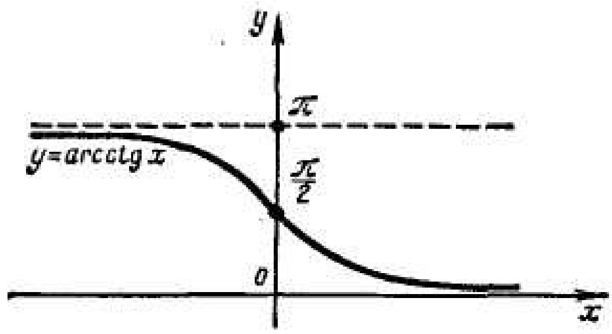


Рис. 2.55

Функции $\arcsin x$, $arccosx$, $arctgx$ и $arcctgx$ называются *обратными тригонометрическими функциями.* Все они непрерывны в каждой точке области определения, как обратные функции соответственно по отношению к непрерывным функциям $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$ и $y = ctgx$.

2.7.6. Показательная и логарифмическая функции

Как мы знаем, показательной функцией называется функция $y = a^x$ (основание *a* считается положительным и не равным 1). При любом значении *x* имеем $y = a^x > 0$. Поэтому график показательной функции расположен выше оси *Ox.* Если *a* > 1, то функция $y = a^x$ возрастающая, если *a* < 1— убывающая. Графики показательных функций изображены на рис. 2.56. Если основание $a > 1$, то, как видно из рис. 2.56, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$, а $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ является функцией, обратной по отношению к показательной функции $y = a^x$. График логарифмической функции $y = \log_a x$ представлен на рис. 2.57. Как непосредственно видно из рисунка, функция $y = \log_a x$ определена для всех положительных значений *x*. Кроме того, если a > 1, то

$$\lim_{x \to 0+0} \log_a x = -\infty, \qquad \text{а} \qquad \lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$$

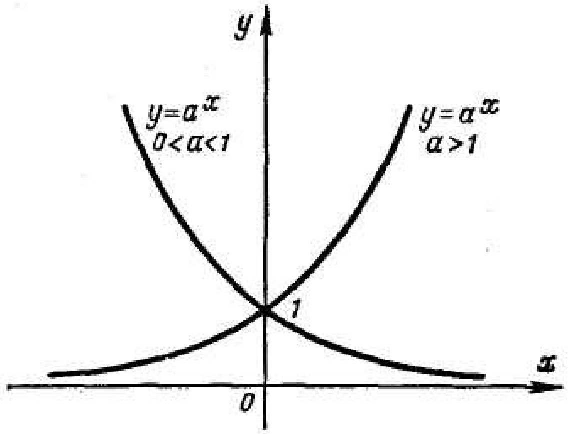


Рис. 2.56

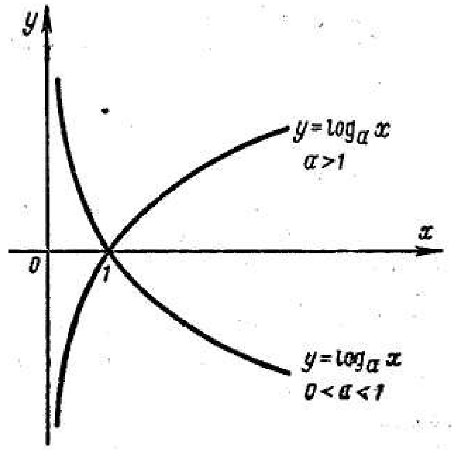


Рис. 2.57

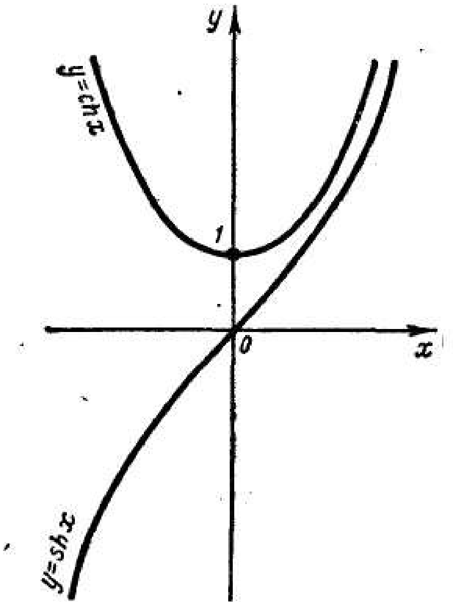
Если основание $a = e$, то функция $y = \ln x$ является обратной по отношению к показательной функции $y = e^x$. Заметим в заключение, что из определения логарифмической функции, как обратной к показательной, следует, что $a^{\log_a x} \equiv x$

2.7.7. Понятие о гиперболических функциях

В математике и ее приложениях рассматриваются гиперболические функции, а именно — *гиперболический синус* sh*x*, *гиперболический косинус* ch*x*, *гиперболический тангенс* th*x* и *гиперболический котангенс* cth*x*. Эти функции определяются следующими формулами:

$$\mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \mathrm{th}x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},\ \mathrm{cth}x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \qquad (2.7.7.1)$$

где e — основание натуральных логарифмов.



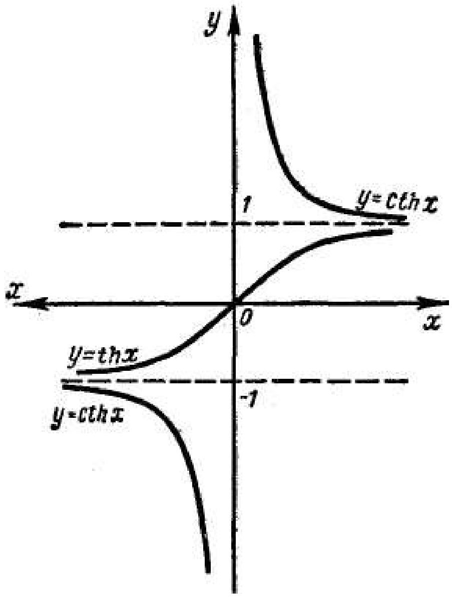


Рис. 2.58 Рис. 59

Между гиперболическими функциями существуют следующие основные зависимости, которые легко проверяются с помощью формул (2.7.7.1):

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1,\ \mathrm{th}x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x},\ \mathrm{cth}x = \frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}. \qquad (2.7.7.2)$$

Графики гиперболических функций приведены на рис. 2.58, 2.59. График функции $y = \mathrm{ch}x$ называется *цепной линией.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бараненков Г.С., Демидович Б.П. и др. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов /Под ред. Б.П. Демидовича. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1966.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1969.

3. Дюбюк П.Е., Кручкович Г.И. и др. Сборник задач по курсу высшей математики. М.: Высшая школа, 1965.

4. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1966.

5. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т. и др. Сборник задач по высшей математике. Ч. 1, 2. М.: Айрис-пресс, 2003. - 576 с.: ил.

6. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961.

7. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. – 2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2002. – 288 с.: ил.

8. Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике. Киев: Наукова думка, 1972.

9. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. Ч. 1,2. - М.: Высшая школа, 1978. - 712 с.